DRN Domácí úkol č. 01 – řešení

1. Na úvod podstatné pozorování: Omezení $x \neq \pm 1$. Nutno mít stále na paměti.
1) Obecné řešení: Pokus o separaci dá stac. řešení $y(x) = 0$.
Separace, integrace, $\ln|y| = \ln|x^2 - 1| + C$, odtud $y = \pm e^C(x^2 - 1)$, oblíbený trik $\pm e^C = D \neq 0$.
Opět případ $D = 0$ zahrne stacionární, obecné řešení je $y(x) = D(x^2 - 1)$, $x \neq \pm 1$.
Platnost? Musíme se dívat na rovnici ($x \neq \pm 1$), na vzorec samotný (bez problému) a na derivaci (bez problémů).
Tři možné intervaly pro řešení, dle počáteční podmínky vybíráme tak, aby x_0 bylo v intervalu.
2) Počáteční podmínky:
a) $y_a(x) = 1 - x^2$, $x \in (-1, 1)$.
b) $y_b(x) = 1 - x^2$, $x \in (1, \infty)$.
Pozor, je to jiné řešení než v a), sice má stejný vzorec, ale je v jiném čase, je to nezávislý děj.
c) $y_c(x) = 2(x^2 - 1)$, $x \in (-\infty, -1)$.
b) $y_d(x) = 0$, $x \in (1, \infty)$. Toto buď výpočtem a $D = 0$, nebo si vzpomeneme na stacionární řešení.

2. Nejsou omezení z rovnice. Rutinní separace:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \implies e^y dy = e^x dx \implies \int e^y dy = \int e^x dx \implies e^y = e^x + C,$$
tedy obecné řešení $y(x) = \ln(e^x + C)$, $e^x + C > 0$. Vzorec nelze dále zjednodušit.

Když x roste k velkým číslům, tak se dříve či později stane C v porovnání s e^x zanedbatelným. Proto odpověď:
Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \sim \ln(e^x) = x$.