DRN Domácí úkol č. 02 – řešení

1. Z rovnice $y \neq 0$. Separace: $\displaystyle\int 2y\,dy = \int dx \implies y^2 = x + C$.

Trik: $y(x) = \pm\sqrt{x+C}$. Podmínka $x + C \geq 0$ z řešení a $x + C \neq 0$ z rovnice, tedy obecné řešení je $y(x) = \pm\sqrt{x+C}$, $x + C > 0$.

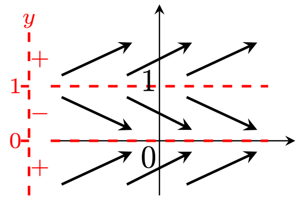
Jde tedy o dvě skupiny řešení, budeme si muset vybírat. Rozhoduje znaménko y_0.

a) $y_a(x) = \sqrt{x+3}$, $x \in (-3, \infty)$; (volba $y(x) = -\sqrt{x+3}$ evidentně nemůže dát hodnotu 2)

b) $y_b(x) = -\sqrt{x-1}$, $x \in (1, \infty)$; (volba $y(x) = \sqrt{x-1}$ evidentně nemůže dát hodnotu -1)

c) $y_c(x) = \sqrt{x+10}$, $x \in (-10, \infty)$.

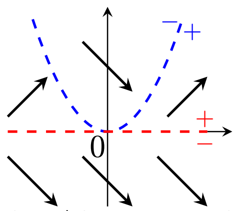
2. Bez omezení. Je to autonomní rovnice, tedy znaménko pravé strany závisí čistě na y, jednorozměrná úloha. Přepíšeme rovnici jako $y' = y^3(y-1)$.



Vidíme dva dělící body jednorozměrné úlohy $y = 0, 1$, čemuž odpovídají dvě vodorovné přímky v rovině. Hravě určíme znaménka například dosazením vhodných hodnot y do výrazu a je hotovo.

Rovnice $y' = 0$ má řešení $y = 0, 1$, jsou to tedy ekvilibria. Z vektorového pole: $y_0 = 0$ je stabilní, $y_0 = 1$ nestabilní. Je dobré také umět odpovědět takto: Stacionární řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je stabilní, stacionární řešení $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ je nestabilní.

3.



Bez omezení z rovnice. Součin faktorů zjednoduší práci.

Obecný přístup: $y' = 0$ dává $y = 0$ nebo $x^2 - y = 0$, dvě dělící křivky (z první mimochodem bude stac. řešení). Varianta „y' neexistuje“ nic nepřidá. Nakreslíme křivky, druhá je křivka $x^2 - y = 0$ neboli standardní parabola $y = x^2$. Pro vzniklé oblasti najdeme znaménka třeba dosazením, pak šipky.

Lze snáze? Kvůli druhému faktoru nelze oddělit vliv x a y, takže až tak snadné to nebude. Ale je možné určit vliv každého faktoru zvlášť, viz značky v obrázku. Určí se rozmyslem nebo zase dosazením: Nad parabolou záporné (třeba bod $(0,1)$), pod ní kladné (třeba $(1,0)$). Vliv faktoru y je vcelku jasný. Pak propojit.

Stacionární řešení: Lze tím, že nastavíme y jako jistou konstantu, vynulovat derivaci všude?

Ano, volbou $y = 0$, tedy $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je stacionární řešení.

Volba $y = x^2$ by také nulovala, ale to není konstantní (stacionární) funkce, takže nic.

Poznámka: Tato rovnice není separabilní ani lineární. Co se týče druhého, správný tvar musí mít y' izolováno, takže nějaké finty s dělením rovnice členem y nepřicházejí v úvahu, a všechny y musí být nalevo, což dává přepis $y' + y^2 - yx^2 = 0$. Teď bychom ty dva členy napravo potřebovali mít ve tvaru $a(x)y$ neboli y krát něco s x, což zjevně nejde.