DRN Domácí úkol č. 2

Tento úkol vypracujte a přineste na třetí cvičení.

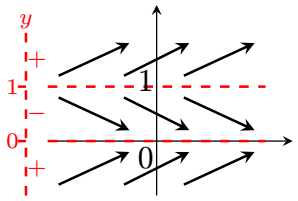
1. Pro rovnici $y' - 2xy = e^{x^2}$ najděte obecné řešení.

2. Pro následující rovnice načrtněte vektorové pole a určete případná stacionární řešení. Pokud nějaká existují, určete jejich stabilitu.
a) $y' = y^4 - y^3$,
b) $y' = y(x^2 - y)$.

Řešení

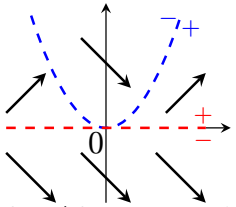
1. Bez omezení na x nebo y. Není separabilní, ale je lineární.
1) Homogenní verze: $y' - 2xy = 0$.
Měla by jít separací: $y' = 2xy$, tedy
$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \implies \ln|y| = x^2 + C$, klasika, $y = \pm e^C e^{x^2}$ a proto $y(x) = D\,e^{x^2}$, kde $D = 0$ zahrnulo stacionární řešení $y(x) = 0$.
2) Variace: Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = D(x)\,e^{x^2}$. Dosadíme do rovnice:
$[D(x)\,e^{x^2}]' - 2xD(x)\,e^{x^2} = e^{x^2}$ neboli $D'(x)\,e^{x^2} + D(x)\,e^{x^2}(2x) - 2xD(x)\,e^{x^2} = e^{x^2}$.
Zázrak krácení dá $D'(x)\,e^{x^2} = e^{x^2}$ neboli $D'(x) = e^{-x^2}e^{x^2} = 1$. Integrujeme, $D(x) = x + C$.
Dosadíme do odhadu: $y(x) = (x + C)\,e^{x^2} = x\,e^{x^2} + C\,e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
Alternativa: Vynecháme $+C$, dostaneme $D(x) = x$, pak partikulární řešení $y_p(x) = x\,e^{x^2}$, odtud obecné řešení vzorcem $y_p + y_h$ známým z lineární algebry.

2.
a) Bez omezení. Je to autonomní rovnice, tedy znaménko pravé strany závisí čistě na y, jednorozměrná úloha. Přepíšeme rovnici jako $y' = y^3(y - 1)$.
Vidíme dva dělící body jednorozměrné úlohy $y = 0, 1$, čemuž odpovídají dvě vodorovné přímky v rovině. Hravě určíme znaménka například dosazením vhodných hodnot y do výrazu a je hotovo.



Rovnice $y' = 0$ má řešení $y = 0, 1$, jsou to tedy ekvilibria. Z vektorového pole: $y_0 = 0$ je stabilní, $y_0 = 1$ nestabilní. Je dobré také umět odpovědět takto: Stacionární řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je stabilní, stacionární řešení $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ je nestabilní.

b) Bez omezení z rovnice. Součin faktorů zjednodušší práci.
Obecný přístup: $y' = 0$ dává $y = 0$ nebo $x^2 - y = 0$, dvě dělící křivky (z první mimochodem bude stac. řešení). Varianta „y' neexistuje“ nic nepřidá. Nakreslíme křivky, druhá je křivka $x^2 - y = 0$ neboli standardní parabola $y = x^2$. Pro vzniklé oblasti najdeme znaménka třeba dosazením, pak šipky.



Lze snáze? Kvůli druhému faktoru nelze oddělit vliv x a y, takže až tak snadné to nebude. Ale je možné určit vliv každého faktoru zvlášť, viz značky v obrázku. Určí se rozmyslem nebo zase dosazením: Nad parabolou záporné (třeba bod $(0, 1)$), pod ní kladné (třeba $(1, 0)$). Vliv faktoru y je vcelku jasný. Pak propojit.
Stacionární řešení: Lze tím, že nastavíme y jako jistou konstantu, vynulovat derivaci všude?
Ano, volbou $y = 0$, tedy $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je stacionární řešení.
Volba $y = x^2$ by také nulovala, ale to není konstantní (stacionární) funkce, takže nic.
Poznámka: Tato rovnice není separabilní ani lineární. Co se týče druhého, správný tvar musí mít y' izolováno, takže nějaké finty s dělením rovnice členem y nepřicházejí v úvahu, a všechny y musí být nalevo, což dává přepis $y' + y^2 - yx^2 = 0$. Teď bychom ty dva členy napravo potřebovali mít ve tvaru $a(x)y$ neboli y krát něco s x, což zjevně nejde.