DRN Domácí úkol č. 3

Tento úkol vypracujte a přineste na čtvrté cvičení.

1. Uvažujte funkci $f(x) = x^4$. Odhadněte její derivaci v bodě $a = 1$ pomocí dopředné diference s krokem $h = 0.01$.
Jistě znáte správnou hodnotu této derivace. Najděte absolutní a relativní chybu vašeho odhadu.

2. Odhadněte hodnotu integrálu $\int_0^2 \sin(x)\,dx$ pomocí:

a) metody levých obdélníků s $n = 4$;
b) metody pravých obdélníků s $n = 4$;
c) lichoběžníkové metody s $n = 4$.

Odhady nemusíte dopočítávat do konečného čísla, vzorec typu $\frac{1}{7}[2^2 + 3^2]$ stačí (dokonce je lepší, uvidíme z něj, co jste dělali).

Poznámka: Jako přípravu a zkoušku můžete u všech tří případů nakreslit obrázek vysvětlující, co vlastně počítáte neboli jak ony metody fungují. Pak si můžete rozmyslet, jestli jste z obrázku schopni vymyslet, jak vypadají obecné vzorce pro tyto tři metody. Jakého jsou řádu? Co to znamená?

Řešení

1. $f'(1) \sim \dfrac{(a+h)^4 - a^4}{h} = \dfrac{1.01^4 - 1^4}{0.01} = 4.060401.$
Víme $[x^4]'(1) = 4$. $E_x = x - \hat{x} = -0.060401$, $\varepsilon_x = \frac{|E_x|}{x} = \frac{0.060401}{4} = 0.0151...$
Podle relativní chyby můžeme odhadnout, že jedna cifra našeho odhadu je správně, což odpovídá, protože zaokrouhleně jsme odhadli $f'(1) \approx 4.1$.

2. $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$.
Levé obdélníky: $\int_0^2 \sin(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\big[\sin(0) + \sin(0.5) + \sin(1) + \sin(1.5)\big]$.
Pravé obdélníky: $\int_0^2 \sin(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\big[\sin(0.5) + \sin(1) + \sin(1.5) + \sin(2)\big]$.
Lichoběžníky: $\int_0^2 \sin(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\big[\sin(0) + 2\sin(0.5) + 2\sin(1) + 2\sin(1.5) + \sin(2)\big]$.
Bonusové odpovědi: Obdélníkové metody jsou řádu 1, lichoběžníková je řádu 2.
Metoda je řádu p, jestliže $|E_h| \leq ch^p$, kde E_h je globální chyba přibližného řešení získaného s (rozumně malým) krokem h. Pro upřesnění, konstanta c není univerzální, závisí na příkladu, který řešíme, ale ne na h.