DRN Domácí úkol č. 4

Tento úkol vypracujte a přineste na páté cvičení.

1. Uvažujte počáteční úlohu $y' = \dfrac{y}{2x}$, $y(1) = 1$. Její řešení budeme chtít aproximovat na intervalu $\langle 1, 6\rangle$ pomocí Eulerovy metody.
a) Napište obecné iterační vzorce pro x_i, y_i v situaci, kdy je dáno nějaké (nám neznámé) $n \in \mathbb{N}$; tím si natrénujete odpověď na zkouškovou otázku „vysvětli Eulerovu metodu" (můžete také zkusit nakreslit vysvětlující obrázek).
b) Vzorce aplikujte na danou úlohu a interval pro $n = 5$ a odvoďte konkrétní iterační vzorce.
c) Pomocí vzorců najděte první tři body žádané aproximace (včetně počátečního).

2. Řešili jsme jistou počáteční úlohou metodou RK2 (tedy řádu 2) s krokem $h = 0.5$. Máme důvod si myslet, že chyba je nejvýše $E_{0.5} = 0.01$.
a) Odhadněte chybu v případě, že tuto metodu aplikujeme s krokem $h = 0.1$.
b) Jaký krok byste doporučili, pokud chceme mít chybu nejvýše $E = 0.0025$?

Mimochodem, poslední dva týdny máme úkoly z numeriky. Všimli jste si, že všechny šly spočítat bez kalkulačky? Já raději vidím, jak studenti přemýšlejí, než aby zkusmo cpali čísla do přístroje. Kalkulačku nebudete potřebovat ani u zkoušky (ale zakázaná není).

Řešení

1. b) a) Třeba takto: $h = \frac{b-a}{n}$. x_0, y_0 dáno z poč. podm.;
$x_{i+1} = x_i + h$, $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$ pro $i = 0, \dots, n-1$.
b) Pro $\langle 1, 6\rangle$ a $n = 5$ vyjde $h = 1$, proto
(0) $x_0 = 1$, $y_0 = 1$,
(1) $x_{i+1} = x_i + 1$, $y_{i+1} = y_i + \frac{y_i}{2x_i}$.
c) $(1, 1)$, $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $\left(3, \frac{15}{8}\right)$ neboli $(1, 1)$, $(2, 1.5)$, $(3, 1.875)$.

2. a) Zmenšení kroku pětkrát by u metody řádu 2 mělo snížit chybu přibližně 5^2 krát. Tedy odhad chyby je

$$E_{0.1} = \tfrac{1}{5^2} E_{0.5} = \tfrac{0.01}{25} = \tfrac{0.04}{100} = 0.0004.$$

b) Zmenšení kroku a-krát znamená zmenšení chyby a^2 krát pro metodu řádu 2. My chceme zmenšit chybu kolikrát? $\frac{E_{0.5}}{E} = \frac{0.01}{0.0025} = \frac{0.04}{0.01} = 4 = 2^2$.
Chceme-li zmenšit chybu 2^2 krát, stačí zmenšit krok dvakrát, tedy doporučíme krok $h = \frac{1}{2}0.5 = 0.25$. Pro jistotu bychom asi vzali 0.2.

Tento postup je možné udělat analyticky, tedy hledat nový krok H ve tvaru $H = ah = a \cdot 0.5$. Požadavek $E_H = 0.0025$ lze přepsat jako $E_{0.5/a} = 0.0025$ neboli $\frac{1}{a^2} E_{0.5} = 0.0025$, odtud $a^2 = \frac{E_{0.5}}{0.0025} = \frac{0.01}{0.0025} = 4$. Pak $a = 2$ a $H = \frac{1}{2}0.5 = 0.25$.

Jiné úvahy jsou také možné, například: Ze známé chyby $0.01 = c(0.5)^2$, odtud $c = \frac{0.01}{0.25} = 0.04$. Chceme $0.0025 = ch^2 = 0.04h^2$, odtud $h^2 = \frac{0.0025}{0.04} = \frac{1}{100}\,\frac{25}{4}$, odtud $h = \sqrt{\frac{1}{100}\,\frac{25}{4}} = \frac{1}{10}\,\frac{5}{2} = 0.25$.
Samozřejmě kdo má kalkulačku, nemusí si takhle hrát a prostě tam ta čísla nasype.