DRN Domácí úkol č. 6

Tento úkol vypracujte a přineste na sedmé cvičení.

1. Najděte řešení rovnice $y'' - 5y' + 6y = e^{3x} + 12x - 4$ splňující počáteční podmínky $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

2. Najděte řešení rovnice $y''' + 9y' = 8\cos(x) - 9$ splňující počáteční podmínky $y(0) = 13$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

Řešení

1. 1) Obecné řešení:
a) Hom: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda = 2, 3$, $y_h(x) = a\,e^{2x} + b\,e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Odhad: dva typy.
e^{3x}: základ $A\,e^{3x}$; $\lambda = 3$, překryv násobnosti $m = 1$, proto korekce, $Ax\,e^{3x}$.
$12x - 4$: základ $Bx + C$; $\lambda = 0$, bez překryvu, proto bez korekce.
$y_p(x) = Ax\,e^{4x} + Bx + C$, po dosazení

$$A\,e^{3x} + 6Bx + [-5B + 6C] = e^{3x} + 12x - 4,$$

$A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, obecné řešení je
$y(x) = x\,e^{3x} + 2x + 1 + a\,e^{2x} + b\,e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.
2) Poč. podmínky: $y(x) = x\,e^{3x} + 2x + 1 + e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. 1) Obecné řešení:
a) Hom: $\lambda^3 + 9\lambda = 0 \implies \lambda(\lambda^2 + 9) = 0 \implies \lambda = 0, \pm 3i$.
$\lambda = 0 \pm 3i$, $y_h(x) = a + b\cos(3x) + c\sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Odhad: dva typy.
$8\cos(x)$: základ $A\cos(x) + B\sin(x)$; $\lambda = i$, bez překryvu, proto bez korekce.
-9: základ C; $\lambda = 0$, překryv násobnosti $m = 1$, proto korekce, Cx.
$y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + Cx$, po dosazení

$$8B\cos(x) - 8A\sin(x) + 9C = 8\cos(x) - 9,$$

$A = 0$, $B = 1$, $C = -1$, obecné řešení je
$y(x) = \sin(x) - x + a + b\cos(3x) + c\sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$.
2) Poč. podmínky: $y(x) = \sin(x) - x + 13$, $x \in \mathbb{R}$.