DRN Domácí úkol č. 07 – řešení

1. a) Dáno $\langle a_0, b_0\rangle = \langle 1, 5\rangle$. Kontrola: $f(1) = -1 < 0$, $f(5) = 11 > 0$, opačná znaménka.
Střed $m_0 = \frac{1}{2}(1+5) = 3$, $f(3) = 1 > 0$, opačné znaménko oproti $f(1)$, tedy kořen v $\langle a_1, b_1\rangle = \langle 1, 3\rangle$.
Střed $m_1 = 2$, $f(2) = -1 < 0$, opačné znaménko oproti $f(3)$, tedy kořen v $\langle a_2, b_2\rangle = \langle 2, 3\rangle$.
Nabídneme odhad kořene $m_2 = 2.5$.

b) Vzorec $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $f'(x) = 2x - 3$.
$x_0 = 1$, $x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 0$, $x_2 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{1}{3}$.
Bonus: Kdo chtěl, připravil si iterační schéma $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3x_k + 1}{2x_k - 3} = \frac{x_k^2 - 1}{2x_k - 3}$ a ušetřil si trochu počítání.

c) Použijeme "test tří hodnot".
$f(x_2) = \frac{1}{9} - 1 + 1 = \frac{1}{9} > 0$.
$f(x_2 - \varepsilon) = f\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{144} - \frac{36}{144} + 1 = \frac{109}{144} > 0$.
Zatím beze změny znaménka, tedy nevíme, zda mezi $x_2 - \varepsilon$ a x_2 je kořen.
$f(x_2 + \varepsilon) = f\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{49}{144} - \frac{252}{144} + 1 = -\frac{59}{144} < 0$.
Znaménko se změnilo, mezi x_2 a $x_2 + \varepsilon$ existuje kořen a náš odhad je tedy dostatečně dobrý.

Poznámka: Podmínku $|k_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ používáme k zastavování, protože nic lepšího nemáme, ale poynat blízkost kořene vlastně neumí.

2. Schéma: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - x_k + 1}{2x_k - 1} = \frac{x_k^2 - 1}{2x_k - 1}$.
Pak $x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.
Iterace oscilují. Vypadá to na dolík, který nezasahuje pod osu x a iterace v něm běhají. Protože jde o polynom druhého stupně, nejspíš je to parabola nad osou x, tedy bez kořene.

Bonus: Dle vzorce je $x_2 = \frac{f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1\cdot 2 - 3\cdot 1}{1 - 3} = \frac{1}{2}$.
Podrobně: Skrz body $(2, 3)$ a $(1, 1)$ vede přímka o rovnici $y = 3 + \frac{1-3}{1-2}(x - 2) = 2x - 1$.
Volbou $y = 0$ získáme průsečík: $0 = 2x - 1 \implies x_2 = \frac{1}{2}$.