DRN Domácí úkol č. 7

Tento úkol vypracujte a přineste na osmé cvičení.

1. Hledáme kořen funkce $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

a) Aplikujte na tuto úlohu metodu bisekce na intervalu $\langle 1, 5\rangle$, předveďte první dvě iterace.
Své kroky, zejména ty rozhodovací, komentujte, aby zkoušející poznal, že víte, co děláte. (Neobeznámený člověk by z vašich komentářů měl být schopen pochopit, jak tato metoda funguje.)

b) Aplikujte na tuto úlohu Newtonovu metodu s počátečním odhadem $x_0 = 1$. Najděte první tři aproximace (tedy proveďte dva iterační kroky).

c) Zákazník chce odhad kořene s přesností $\varepsilon = 0.25$. Vyhovuje číslo x_2 z části b)?
(Pokud na tohle použijete kalkulačku, nebudu vás mít za zbabělce.)

2. Na úlohu hledání kořene funkce $f(x) = x^2 - x + 1$ aplikujte Newtonovu metodu s počátečním odhadem $x_0 = 2$. Nejprve připravte a zjednodušte iterační vzorec a pak spočítejte prvních pět čísel (tedy proveďte čtyři iterační kroky).
Co si o tom myslíte? Dokážete na základě povídání z přednášky o problémech Newtonovy metody odhadnout, co se asi děje?

Řešení

1. a) Dáno $\langle a_0, b_0\rangle = \langle 1, 5\rangle$. Kontrola: $f(1) = -1 < 0$, $f(5) = 11 > 0$, opačná znaménka.
Střed $m_0 = \frac{1}{2}(1 + 5) = 3$, $f(3) = 1 > 0$, opačné znaménko oproti $f(1)$, tedy kořen v $\langle a_1, b_1\rangle = \langle 1, 3\rangle$.
Střed $m_1 = 2$, $f(2) = -1 < 0$, opačné znaménko oproti $f(3)$, tedy kořen v $\langle a_2, b_2\rangle = \langle 2, 3\rangle$.
Nabídneme odhad kořene $m_2 = 2.5$.

b) Vzorec $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $f'(x) = 2x - 3$.
$x_0 = 1$, $x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 0$, $x_2 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{1}{3}$.

Bonus: Kdo chtěl, připravil si iterační schéma $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3x_k + 1}{2x_k - 3} = \frac{x_k^2 - 1}{2x_k - 3}$ a ušetřil si trochu počítání.

c) Použijeme "test tří hodnot".
$f(x_2) = \frac{1}{9} - 1 + 1 = \frac{1}{9} > 0$.
$f(x_2 - \varepsilon) = f\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{144} - \frac{36}{144} + 1 = \frac{109}{144} > 0$.
Zatím beze změny znaménka, tedy nevíme, zda mezi $x_2 - \varepsilon$ a x_2 je kořen.
$f(x_2 + \varepsilon) = f\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{49}{144} - \frac{252}{144} + 1 = -\frac{59}{144} < 0$.
Znaménko se změnilo, mezi x_2 a $x_2 + \varepsilon$ existuje kořen a náš odhad je tedy dostatečně dobrý.

2. Schéma: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - x_k + 1}{2x_k - 1} = \frac{x_k^2 - 1}{2x_k - 1}$.
Pak $x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.
Iterace oscilují. Vypadá to na dolík, který nezasahuje pod osu x a iterace v něm běhají. Protože jde o polynom druhého stupně, nejspíš je to parabola nad osou x, tedy bez kořene.