**DRN Domácí úkol č. 08 – řešení**

**1.** Je mnoho možností, snad mezi těmi níže najdete ty své.

- standardní převod přičtením $x$: $x^2 - 2x + 1 = x$.

Zde tedy $\varphi(x) = x^2 - 2x + 1$, iterace je $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k + 1$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, ...
$\varphi'(x) = 2x - 2$, tedy $|\varphi'(1)| = 0$. To vypadá velmi nadějně. Ovšem jak vidíme výše, tato iterace se zacyklí.

- $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $3x = x^2 + 1$, proto $x = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$.

Zde tedy $\varphi(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$, iterace je $x_{k+1} = \frac{1}{3}(x_k^2 + 1)$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{13}{27}$.
(Ta třináctka vyšla náhodou, fakt to není schválně.)
$\varphi'(x) = \frac{2}{3}x$, tedy $|\varphi'(1)| = \frac{2}{3}$. Vyšlo číslo poněkud menší než jedna, to vypadá vcelku nadějně.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 0.38$.

- $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 = 3x - 1$, proto $x = \sqrt{3x - 1}$.

Zde tedy $\varphi(x) = \sqrt{3x - 1}$, iterace je $x_{k+1} = \sqrt{3x_k - 1}$.
Trochu riskantní, snad se při iteraci pod odmocninou neocitnou záporná čísla.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3\sqrt{2} - 1}$.
$\varphi'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$, tedy $|\varphi'(1)| = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.06$. Vyšlo číslo větší než jedna, to nevypadá moc nadějně. Ale je to blízko a $x_k$ pak odejdou trochu jinam, třeba to tam bude lepší.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 2.62$.

- $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $1 = 3x - x^2$, proto $x = 3x^2 - x^3$.

Zde tedy $\varphi(x) = 3x^2 - x^3$, iterace je $x_{k+1} = 3x_k^2 - x_k^3$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
$\varphi'(x) = 6x - 3x^2$, tedy $|\varphi'(1)| = 3$. Vyšlo číslo citelně větší než jedna, to nevypadá moc nadějně.
Mimochodem, tato iterace velmi rychle diverguje.

- $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 - 3x = -1$, odtud $x(x - 3) = -1$, takže například $x = \frac{-1}{x-3} = \frac{1}{3-x}$.

Zde tedy $\varphi(x) = \frac{1}{3-x}$, iterace je $x_{k+1} = \frac{1}{3-x_k}$.
Snad nedojde k dělení nulou.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{5}$.
$\varphi'(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$, tedy $|\varphi'(1)| = \frac{1}{4}$. Vyšlo číslo výrazně menší než jedna, to vypadá dost nadějně.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 0.38$.

- $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 - 3x = -1$, odtud $x(x - 3) = -1$, odtud $x - 3 = -\frac{1}{x}$, tedy $x = 3 - \frac{1}{x}$.

Zde tedy $\varphi(x) = 3 - \frac{1}{x}$, iterace je $x_{k+1} = 3 - \frac{1}{x_k}$.
Snad nedojde k dělení nulou.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$.
$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2}$, tedy $|\varphi'(1)| = 1$. To je přesně na rozmezí, posunem ke kořeni (kterému?) se derivace nejspíše změní a kdo ví jak. Tady fakt nic nevíme.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 2.62$.

- $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 - 2x + 1 = x$ (to už tu bylo na začátku), pak ovšem $(x - 1)^2 = x$, odtud $x - 1 = \pm\sqrt{x}$, tedy $x = 1 \pm \sqrt{x}$.

Zkusíme tu s plusem: $\varphi(x) = 1 + \sqrt{x}$, iterace je $x_{k+1} = 1 + \sqrt{x_k}$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = 2$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.
$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, tedy $|\varphi'(1)| = \frac{1}{2}$. Vyšlo číslo menší než jedna, to vypadá docela nadějně.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 2.62$.
Zkusíme tu s mínusem: $\varphi(x) = 1 - \sqrt{x}$, iterace je $x_{k+1} = 1 - \sqrt{x_k}$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. A kruci, zase semafor.
$\varphi(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$, tedy $|\varphi'(1)| = \frac{1}{2}$. Vyšlo číslo menší než jedna, to vypadá docela nadějně. Ale jak vidíme, nevyšlo to.
Když ale začneme v $x_0 = 0.9$, dojedeme ke kořeni $\approx 0.38$.

- $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 - x + 1 = 2x$, odtud $\frac{1}{2}(x^2 - x + 1) = x$.

Zde tedy $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)$, iterace je $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k^2 - x_k + 1)$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{8}$.
$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(2x - 1)$, tedy $|\varphi'(1)| = \frac{1}{2}$. Vyšlo číslo výrazně menší než jedna, to vypadá dost nadějně.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 0.38$.

• $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 + 2x + 1 = 5x$, odtud $x = \frac{1}{5}(x^2 + 2x + 1)$ a tedy $x = \frac{1}{5}(x + 1)^2$.
Zde tedy $\varphi(x) = \frac{1}{5}(x + 1)^2$, iterace je $x_{k+1} = \frac{1}{5}(x_k + 1)^2$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{81}{125}$.
$\varphi'(x) = \frac{2}{5}(x + 1)$, tedy $|\varphi'(1)| = \frac{4}{5}$. Vyšlo číslo mírně menší než jedna, to vypadá mírně nadějně.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 0.38$.

• $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 - 4x + 4 = 3 - x$, odtud $(x - 2)^2 = 3 - x$ a tedy $x = 3 - (x - 2)^2$.
Zde tedy $\varphi(x) = 3 - (x - 2)^2$, iterace je $x_{k+1} = 3 - (x_k - 2)^2$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, zacyklili jsme se.
$\varphi'(x) = -2(x - 2)$, tedy $|\varphi'(1)| = 2$. Vyšlo číslo větší než jedna, to nevypadá nadějně.

• $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 - 3x = -1$, odtud $x(x - 3) = -1$, odtud $x - 3 = -\frac{1}{x}$, tedy $x = 3 - \frac{1}{x}$.
Zde tedy $\varphi(x) = 3 - \frac{1}{x}$, iterace je $x_{k+1} = 3 - \frac{1}{x_k}$.
Snad nedojde k dělení nulou.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$.
$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2}$, tedy $|\varphi'(1)| = 1$. To je přesně na rozmezí, posunem ke kořeni (kterému?) se derivace nejspíše změní a kdo ví jak. Tady fakt nic nevíme.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 2.62$.

• $x^2 - 3x + 1 = 0$ znamená $x^2 - 3x + 2 = 1$ neboli $(x - 2)(x - 1) = 1$, odtud $x - 1 = \frac{1}{x-2}$ a tedy $x = \frac{1}{x-2} + 1$.
Zde tedy $\varphi(x) = \frac{1}{x-2} + 1$, iterace je $x_{k+1} = \frac{1}{x_k-2} + 1$.
Vychází $x_0 = 1$ (dáno), $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.
$\varphi'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$, tedy $|\varphi'(1)| = 1$. Přesně na hranici, nevíme nic.
Mimochodem, tato iterace konverguje ke kořeni $\approx 0.38$.