DRN Domácí úkol č. 09 – řešení

1. $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda = 1, 2$.

$\underline{\lambda = 1}$: $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, $4v_1 - 6v_2 = 0$, volba $v_2 = 2 \implies v_1 = 3$, $\vec{y}_a = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) e^{1\cdot x} = \left(\begin{smallmatrix} 3e^x \\ 2e^x \end{smallmatrix}\right)$.

$\underline{\lambda = 2}$: $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{smallmatrix}\right)$, $3v_1 - 6v_2 = 0$, volba $v_2 = 1 \implies v_1 = 2$, $\vec{y}_b = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{2x} = \left(\begin{smallmatrix} 2e^{2x} \\ e^{2x} \end{smallmatrix}\right)$.

Obecné řešení $\vec{y}(x) = a\vec{y}_a + b\vec{y}_b = \left(\begin{smallmatrix} 3a\,e^x + 2b\,e^{2x} \\ 2a\,e^x + b\,e^{2x} \end{smallmatrix}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Rozepíšeme:
$y_1(x) = 3a\,e^x + 2b\,e^{2x}$, $y_2(x) = 2a\,e^x + b\,e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Poč. podmínky: Rovnice $3a + 2b = 5$, $2a + b = 3$, odtud $a = b = 1$.
Řešení: $y_1(x) = 3e^x + 2e^{2x}$, $y_2(x) = 2e^x + e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Protože obecné řešení nesplňuje $\vec{y}(x) \to \vec{0}$ pro $x \to \infty$, tak řešení $\vec{y}(x) = \vec{0}$ není stabilní.
Jiné dobré odůvodnění: Protože máme vlastní číslo $\lambda \geq 0$, tak ....

2. $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 9 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0$, $\lambda = \pm 3i$.

$\underline{\lambda = 3i}$ (tento stačí): $\left(\begin{smallmatrix} -3i & 9 \\ -1 & -3i \end{smallmatrix}\right)$, $-3iv_1 + 9v_2 = 0$, volím $v_2 = i \implies v_1 = 3$,
$\vec{y}_C = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ i \end{smallmatrix}\right) e^{3ix}$. Přepíšu $e^{3ix} = \cos(3x) + i\sin(3x)$, roznásobím s vektorem a dostávám
$\vec{y}_C(x) = \left(\begin{smallmatrix} 3\cos(3x) + 3i\sin(3x) \\ -\sin(3x) + i\cos(3x) \end{smallmatrix}\right)$. Dvě řešení do báze:
$\vec{y}_a(x) = \operatorname{Re}(\vec{y}_C) = \left(\begin{smallmatrix} 3\cos(3x) \\ -\sin(3x) \end{smallmatrix}\right)$, $\qquad \vec{y}_b(x) = \operatorname{Im}(\vec{y}_C) = \left(\begin{smallmatrix} 3\sin(3x) \\ \cos(3x) \end{smallmatrix}\right)$.
Takže obecné řešení $\vec{y}(x) = a\vec{y}_a(x) + b\vec{y}_b(x)$ neboli

$$y_1(x) = 3a\cos(3x) + 3b\sin(3x),$$
$$y_2(x) = -a\sin(3x) + b\cos(3x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Protože obecné řešení nesplňuje $\vec{y}(x) \to \vec{0}$ pro $x \to \infty$ (popřípadě protože existuje vlastní číslo s $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$), tak řešení $\vec{y}(x) = \vec{0}$ není stabilní.

3. Přeznačení $y = y_1$. Pak redukujeme

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2'' + xy_2' - y_2 - \ln(x)y_1 &= 13e^x \end{aligned} \implies \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' + xy_3 - y_2 - \ln(x)y_1 &= 13e^x \end{aligned}$$

Výsledek:
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= \ln(x)y_1 + y_2 - xy_3 + 13e^x. \end{aligned}$$