DRN Domácí úkol č. 11 – řešení

1. a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right).$

Kroky: $R1 \leftrightarrow R2$, $R2 - 3 \times R1 \mapsto R2$, $R3 + 4 \times R1 \mapsto R3$, $R3 + 2 \times R2 \mapsto R3$.
Vznikla soustava

$$\begin{aligned} x - y \quad\quad &= 2 \\ y + z &= 1 \\ 2z &= 4. \end{aligned}$$

Zpětná substituce: $z = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$, $y = 1 - z = -1$, $x = 2 + y = 1$.

b) Součin prvků na diagonále nové matice je je 2. Ale prohodili jsme jednou řádky, proto je determinant původní matice soustavy $\det(A) = -2$.
Takto se nejlépe počítají determinanty velkých matic, náročnost $\frac{2}{3}n^3$ je určitě lepší než $n!$.

c) Aplikujeme operace z první eliminace: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Vznikne soustava

$$\begin{aligned} x - y \quad\quad &= 1 \\ y + z &= 1 \\ 2z &= 2. \end{aligned}$$

Zpětná substituce: $z = 1$, $y = 1 - z = 0$, $x = 1 + y = 1$. Zkouška vyšla.

2. $\lambda = -1, 4$, $\varrho(A) = 4$. $\|A\|_\infty = \max(1+2, 3+2) = 5$, $\|A\|_1 = \max(1+3, 2+2) = 4$.
Poznámka: Normy nelze počítat pomocí eliminace, protože řádkové operace normy mění!