DRN Domácí úkol č. 1 (náhradní)

1. Pro rovnici $\dfrac{y'}{3x^2-12} = y$ najděte obecné řešení
a pak partikulární řešení pro následující počáteční podmínky:
a) $y(0) = 13$; b) $y(3) = 2e^{-9}$; c) $y(-3) = 4e^{9}$; d) $y(13) = 0$.

2. Pro rovnici $y' - \cos(x)y = 2x\, e^{\sin(x)}$ najděte obecné řešení.

DRN Domácí úkol č. 2 (náhradní)

1. Pro rovnici $2y' = \dfrac{-3}{x^4 y}$ najděte obecné řešení
a pak partikulární řešení pro následující počáteční podmínky:
a) $y(1) = 1$; b) $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{7}$; c) $y(-2) = -\sqrt{\frac{7}{8}}$.

2. Načrtněte vektorové pole pro rovnici $y' = y - \frac{1}{y}$ a určete případná stacionární řešení. Pokud nějaká existují, určete jejich stabilitu.
Nápověda: Rozdíl zlobí, pomůže přepsat si to na tvar součinu či podílu.

3. Načrtněte vektorové pole pro rovnici $y' = (y-1)(\sqrt{x} - y)$ a určete případná stacionární řešení.

DRN Domácí úkol č. 3 (náhradní)

1. Nechť $f(x) = x^3$. Odhadněte hodnotu $f'(2)$ pomocí dopředné diference.
Najděte také přesnou hodnotu a spočítejte absolutní a relativní chybu vašeho odhadu.

2. Odhadněte hodnotu integrálu $\int\limits_1^3 \frac{1}{x}\, dx$ pomocí:
a) metody levých obdélníků s $n = 4$;
b) metody pravých obdélníků s $n = 4$;
c) lichoběžníkové metody s $n = 4$.
Odhady nemusíte dopočítávat do konečného čísla, vzorec typu $\frac{1}{7}[2^2 + 3^2]$ stačí (dokonce je lepší, uvidíme z něj, co jste dělali).

DRN Domácí úkol č. 4 (náhradní)

1. Uvažujte počáteční úlohu $y' = \dfrac{3x^2}{2(y-1)}$, $y(1) = 2$.
Najděte numerickou aproximaci tohoto řešení na $\langle 1, 6\rangle$ pomocí Eulerovy metody, jmenovitě následujte tyto kroky:
a) Nejprve napište obecné iterační vzorce pro x_i, y_i v situaci, kdy je dáno nějaké (nám neznámé) $n \in \mathbb{N}$; tím si natrénujete odpověď na zkouškovou otázku „vysvětli Eulerovu metodu" (můžete také zkusit nakreslit vysvětlující obrázek);
b) vzorce aplikujte na danou úlohu a interval pro $n = 5$ a odvoďte konkrétní iterační vzorce;
c) pomocí vzorců najděte první tři body žádané aproximace (včetně počátečního).

2. Řešili jsme jistou počáteční úlohou metodou RK2 (tedy řádu 2) s krokem $h = 0.2$. Máme důvod si myslet, že chyba je nejvýše $E_{0.2} = 0.01$.
a) Odhadněte chybu v případě, že tuto metodu aplikujeme s krokem $h = 0.05$.
b) Jaký krok byste doporučili, pokud chceme mít chybu nejvýše $E = 0.0025$?

DRN Domácí úkol č. 05 (náhradní)

1. Najděte řešení počáteční úlohy $y'' + 13y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -13.$

2. Najděte obecné řešení rovnice $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = 0.$
určete jeho typickou asymptotickou rychlost růstu v nekonečnu.
Nápověda: $\lambda = 3$ může pomoci.

DRN Domácí úkol č. 06 (náhradní)

1. Najděte řešení rovnice $y'' - 5y' + 6y = -e^{2x} + 6x - 11$ splňující počáteční podmínky $y(0) = 0, y'(0) = 4.$

2. Najděte řešení rovnice $y''' + 4y' = 4 - 6\sin(x)$ splňující počáteční podmínky $y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = -6.$

DRN Domácí úkol č. 07 (náhradní)

1. Hledáme kořen funkce $f(x) = x^2 + x - 3.$

a) Aplikujte na tuto úlohu metodu bisekce na intervalu $\langle 0, 4\rangle$, předveďte první dvě iterace.
Své kroky, zejména ty rozhodovací, komentujte, aby zkoušející poznal, že víte, co děláte. (Neobeznámený člověk by z vašich komentářů měl být schopen pochopit, jak tato metoda funguje.)

b) Aplikujte na tuto úlohu Newtonovu metodu s počátečním odhadem $x_0 = 0$. Najděte první tři aproximace (tedy proveďte dva iterační kroky).

c) Zákazník chce odhad kořene s přesností $\varepsilon = 0.5$. Vyhovuje číslo x_2 z části b)?
(Pokud na tohle použijete kalkulačku, nebudu vás mít za zbabělce.)

2. Na úlohu hledání kořene funkce $f(x) = x^2 - x + 1$ aplikujte Newtonovu metodu s počátečním odhadem $x_0 = 2$. Nejprve připravte a zjednodušte iterační vzorec a pak spočítejte prvních pět čísel (tedy proveďte čtyři iterační kroky).
Co si o tom myslíte? Dokážete na základě povídání z přednášky o problémech Newtonovy metody odhadnout, co se asi děje?
Bonus: Kdo si myslí na dobrou známku, připomene si metodu sečen. Uvažujme první dva odhady $x_0 = 2$, $x_1 = 1$. Najděte x_2 nejprve dosazením do vzorce z přednášky, a pak ručním vytvořením: Nejprve spočítejte rovnici přímky, která prochází body danými x_0, x_1 na grafu funkce, a pak najděte průsečík této přímky s osou x.

DRN Domácí úkol č. 08 (náhradní)

1. V minulém domácím úkolu jsme hledali kořen funkce $f(x) = x^2 + x - 3$ pomocí metod bisekce a Newtonovy, tam jsme měli počáteční odhad $x_0 = 0$.

a) Najděte nějaký převod rovnice $x^2 + x - 3 = 0$ na úlohu pevného bodu. Napište odpovídající iterační vzorec a předveďte dva kroky s iniciační hodnotou $x_0 = 0$ (tedy najděte x_1, x_2).
Pak odhadněte šance na úspěch vašich iterací pomocí $|\varphi'(0)|$.

b) Zopakujte úlohu a) pro nějaký jiný převod dané rovnice na úlohu pevného bodu.

DRN Domácí úkol č. 09 (náhradní)

1. Najděte řešení počáteční úlohy
$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 6y_2 \qquad & y_1(0) = 5 \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2, \qquad & y_2(0) = 4. \end{aligned}$$

Použijte maticový přístup.

2. Najděte obecné řešení soustavy
$$\begin{aligned} y_1' &= 9y_2 \\ y_2' &= -y_1, \end{aligned}$$

Použijte maticový přístup.

DRN Domácí úkol č. 11 (náhradní)

1. Uvažujte následující soustavu

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 8z &= 14 \\ -3x - 5y - 4z &= -6 \\ x + 2y + z &= 1. \end{aligned}$$

a) Vyřešete tuto soustavu eliminací tak, jak se používá v numerické matematice, tedy nejprve GEM a pak zpětná substituce.
V průběhu eliminace si zapisujte, které řádkové operace jste provedli. Formát zápisu je na vás, ale měli byste se v něm vyznat.

b) Určete determinant matice soustavy.

c) Je dána nová soustava

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 8z &= 12 \\ -3x - 5y - 4z &= -7 \\ x + 2y + z &= 1, \end{aligned}$$

která má úžasnou shodou okolností stejné levé strany jako ta předchozí. Aplikujte řádkové operace zachycené v části a) jen na vektor pravých stran, výsledný vektor spojte s horní trojúhelníkovou maticí soustavy získanou z eliminace z části a) a dopočítejte zpětnou substitucí řešení. Ověřte dosazením do soustavy, že to opravdu je řešení nové soustavy.

2. Uvažujte matici $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Najděte její vlastní čísla a spektrální poloměr.
Spočítejte její řádkovou a sloupcovou normu.

DRN Domácí úkol č. 12 (náhradní)

1. Je dána soustava

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 4x + y + z &= 7 \\ x + 3y - z &= 7. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že má řešení $x = 2$, $y = 1$, $z = -2$.

a) Převeďte tuto soustavu standardním způsobem do podoby pro Jacobiho iterační metodu. Pro počáteční vektor $x_0 = 0$, $y_0 = 3$, $z_0 = 0$ spočítejte další tři iterace Jacobiho metody. Máte pocit, že by konvergovala k řešení?

b) Aplikujte na danou soustavu Gauss-Seidelovu iterační metodu, jmenovitě pro počáteční vektor $x_0 = 0$, $y_0 = 3$, $z_0 = 0$ spočítejte další dvě iterace. Na vhodném místě připojte poznámku, v čem se tento výpočet liší od Jacobiho iterace provedené před chvílí.

c) Zvolte takové pořadí rovnic v soustavě, abyste měli vysokou naději, že Jacobiho a Gauss-Seidelova iterační metoda budou konvergovat. Vysvětlete, o jaký typ soustavy se snažíte.

d) Na přerovnanou soustavu aplikujte Jakobiho iterační metodu a spočítejte pro počáteční vektor $x_0 = 0$, $y_0 = 3$, $z_0 = 0$ další dvě iterace. Vypadá to opravdu nadějně?

e) Na přerovnanou soustavu aplikujte Gauss-Seidelovu iterační metodu a spočítejte pro počáteční vektor $x_0 = 0$, $y_0 = 3$, $z_0 = 0$ další dvě iterace. Vypadá to nadějně?