DRN: ODR 1. řádu

Definice.
Explicitní **obyčejná diferenciální rovnice řádu** n (ODR) je rovnice ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

kde F je funkce n proměnných.
Její **řešení** na (otevřeném) intervalu I je libovolná funkce $y = y(x)$, která má na I derivace až do řádu n a pro všechna $x \in I$ platí

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Jestliže se dá množina všech řešení dané ODR na určitém otevřeném intervalu vyjádřit jedním vzorcem s parametry, řekneme, že je to **obecné řešení** této ODR.
Jedno konkrétní řešení dané rovnice se nazývá **partikulární řešení**.

Definice.
Uvažujme explicitní ODR řádu n $\quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.
Počáteční úloha či **Cauchyho úloha** pro tuto rovnici je problém
(1) ODR: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$;
(2) **počáteční podmínky**: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$,
kde x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1} jsou pevně zvolená reálná čísla.

Definice.
Separabilní (separovatelná) obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je ODR zapsatelná ve tvaru $y' = g(x)h(y)$ pro nějaké funkce g, h.

Věta. (existence)
Uvažujme separabilní ODR $y' = g(x)h(y)$. Předpokládejme, že g je spojitá na nějakém otevřeném intervalu I a h je spojitá na nějakém otevřeném intervalu J. Jestliže $h \neq 0$ na J, pak existuje řešení dané rovnice na I.
Nechť $G(x)$ je primitivní funkce k $g(x)$ na I a $H(y)$ je primitivní funkce k $\frac{1}{h(y)}$ na J. Jestliže existuje inverzní funkce H_{-1} k H, pak se dá obecné řešení dané rovnice na I napsat jako $y(x) = H_{-1}(G(x) + C)$.

Fakt.
Uvažujme separabilní ODR $y' = g(x)h(y)$. Jestliže y_0 splňuje $h(y_0) = 0$, pak konstantní funkce $y(x) = y_0$ je řešením dané ODR na libovolném otevřeném intervalu $I \subset D(g)$ (tzv. **stacionární řešení**).

Algoritmus (řešení separabilní ODR separací)**.**
Zadána diferenciální rovnice, kterou lze algebraicky převést na tvar $y' = g(x) \cdot h(y)$.
1. Napíšeme rovnici jako $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. Převedeme všechna x (včetně dx) napravo a všechna y (včetně dy) nalevo, přidáme integrační značky:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \implies \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx.$$

2. Ověříme, zda může nastat $h(y) = 0$, což vede na stacionární řešení.
3. Za předpokladu $h(y) \neq 0$ integrujeme obě strany.

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx \implies H(y) = G(x) + C.$$

4. Pokud to jde, vyjádříme z rovnosti y jako funkci x:

$$H(y) = G(x) + C \implies y(x) = H_{-1}(G(x) + C).$$

Může se stát, že pro y je více možností, každá vytvoří obecné řešení.
5. Ze zadané rovnice a nalezeného řešení určíme podmínky pro existenci řešení.
6. Pokud je zadána počáteční podmínka, určíme příslušné partikulární řešení a maximální interval jeho platnosti.

Věta. (Peanova o existenci pro ODR 1. řádu s izolovaným y)
Uvažujme ODR zapsanou ve tvaru $y' = f(x, y)$. $(*)$
Nechť I, J jsou otevřené intervaly takové, že f je spojitá na množině $I \times J$.
Pak pro všechna $(x_0, y_0) \in I \times J$ existuje řešení počáteční úlohy $(*)$, $y(x_0) = y_0$ na nějakém okolí bodu x_0.

Věta. (Picardova o existenci a jednoznačnosti pro ODR 1. řádu s izolovaným y)
Uvažujme ODR zapsanou ve tvaru $y' = f(x, y)$. $(*)$
Nechť I, J jsou otevřené intervaly takové, že f je spojitá na množině $I \times J$ a existuje K takové, že pro každé $x \in I$, f je K-Lipschitzovská vzhledem k proměnné y na J.
Pak pro všechna $(x_0, y_0) \in I \times J$ existuje řešení počáteční úlohy $(*)$, $y(x_0) = y_0$ na nějakém okolí bodu x_0 a je na tomto okolí jediné.

Důsledek.
Uvažujme ODR zapsatelnou ve tvaru $y' = f(x, y)$. $(*)$
Jestliže jsou I, J otevřené intervaly takové, že f je spojitá a $\frac{\partial f}{\partial y}$ existuje a je omezená na množině $I \times J$, pak každým bodem $(x_0, y_0) \in I \times J$ prochází právě jedno řešení rovnice $(*)$.

Definice.
Lineární obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je ODR zapsaná ve tvaru

$$y' + a(x)y = b(x),$$

kde $a(x), b(x)$ jsou nějaké funkce.
Tato rovnice se nazývá **homogenní**, jestliže $b(x) = 0$.
Je-li dána lineární ODR $y' + a(x)y = b(x)$, tak její **přidruženou homogenní rovnicí** rozumíme rovnici $y' + a(x)y = 0$.

Věta. (o **řešení** lineární ODR řádu 1)
Uvažujme lineární ODR $y' + a(x)y = b(x)$. Předpokládejme, že $a(x), b(x)$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, nechť A je nějaká primitivní funkce k a na I. Pak má daná rovnice řešení na I ve tvaru $\Big(\int b(x)e^{A(x)}dx\Big)e^{-A(x)}$.
Pokud je B nějaká primitivní funkce k $b(x)e^{A(x)}$ na I, pak máme obecné řešení dané rovnice na I

$$y(x) = (B(x) + C)\, e^{-A(x)}.$$

Algoritmus (metoda variace konstanty pro řešení lineárních ODR 1. řádu)**.**
Zadána rovnice $y' + a(x)y = b(x)$.
1. Separací se najde obecné řešení y_h přidružené homogenní rovnice $y' + a(x)y = 0$.
Má tvar $y_h(x) = C \cdot u(x)$, zahrnuje to i stacionární řešení.

2. Provede se variace konstanty, tedy hledá se řešení ve tvaru $y(x) = C(x) \cdot u(x)$:
Buď dosadíme $y(x)$ do dané rovnice $y' + a(x)y = b(x)$ a zkrátíme, nebo si pamatujeme, že má vyjít rovnice $C'(x)u(x) = b(x)$.
Pak $C(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{u(x)}\, dx$ a toto $C(x)$ dosadíme do $y(x) = C(x)u(x)$.

3. Pokud vezmeme jako $C(x)$ jednu konkrétní primitivní funkci, dostaneme takto jedno partikulární řešení $y_p(x)$, pak obecné řešení je $y = y_p + y_h$.
Pokud se pro $C(x)$ použije při integraci $+C$, po dosazení do $y(x) = C(x)u(x)$ vyjde rovnou obecné řešení.

Definice.
Diferenciální rovnice se nazývá **autonomní**, pokud se v ní nevyskytuje nezávislá proměnná, tedy dá se napsat jako $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Definice.
Uvažujme autonomní ODR 1. řádu $y' = h(y)$. $(*)$
Číslo y_0 se nazývá **rovnovážný stav** či **equilibrium** této rovnice, pokud konstantní funkce $y(x) = y_0$ řeší $(*)$.
Toto ekvilibrium se nazývá (asymptoticky) **stabilní**, jestliže existuje $d > 0$ takové, že pro každé řešení $y(x)$ rovnice $(*)$ platí následující:
Jestliže $|y(x_0) - y_0| < d$ pro nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$,
pak $y(x) \to y_0$ pro $x \to \infty$.
Jinak se toto ekvilibrium nazve **nestabilní**.