DRN: Numerika, derivace

Definice.
Nechť x je číslo a $\hat{x}$ jeho odhad. Pak definujeme
absolutní chybu tohoto odhadu jako $E_x = x - \hat{x}$
a **relativní chybu** jako $\varepsilon_x = \frac{|E_x|}{|x|}$, pokud $x \neq 0$.

Libovolné číslo e_x splňující $|E_x| \leq e_x$ se nazývá **odhad** chyby.

Definice.
Floating point reprezentací (v pohyblivé čárce) čísla x vzhledem k základu β s přesností na p platných míst rozumíme nejlepí aproximaci $fl(x)$ čísla x, kterou lze zapsat ve tvaru

$$fl = d_1.d_2d_3 \cdots d_p \times \beta^e,$$

kde $d_1 \in \{1, \dots, \beta - 1\}$ a $d_2, \dots, d_p \in \{0, 1, \dots, \beta - 1\}$.
Číslu e říkáme exponent, část $d_1.d_2d_3 \cdots d_p$ se nazývá signifikant či mantissa.

Fakt.
Předpokládejme, že číslo x bylo reprezentováno jako $\hat{x}$ v pohyblivé čárce se základem β a přesností p. Relativní chybu pak lze odhadnout takto:

$$\varepsilon_x \leq \frac{1}{2}\beta \cdot \beta^{-p}.$$

Fakt.
Uvažujme reálná čísla $x, y > 0$ a jejich odhady $\hat{x}, \hat{y} > 0$. Pak platí:

$|E_{cx}| = |c| \cdot |E_x|$ $\qquad$ $\varepsilon_{cx} = \varepsilon_x$ pro $c \in I\!R$;
$|E_{x+y}| \leq |E_x| + |E_y|$ $\qquad$ $\varepsilon_{x+y} \leq \max(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$;
$|E_{x-y}| \leq |E_x| + |E_y|$ $\qquad$ $\varepsilon_{x-y} \leq \max(\varepsilon_x, \varepsilon_y)\frac{x+y}{|x-y|}$;
$|E_{x\cdot y}| \leq |y| \cdot |E_x| + |\hat{x}| \cdot |E_y|$ $\qquad$ $\varepsilon_{x\cdot y} \leq \varepsilon_x + (1+\varepsilon_x)\varepsilon_y$;
$|E_{x/y}| \leq \frac{1}{y}\big(|E_x| + |E_y|\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\big)$ $\qquad$ $\varepsilon_{x/y} \leq \varepsilon_x + \varepsilon_y \frac{\hat{x}}{x}\,\frac{y}{\hat{y}}$;

Fakt.
Mají-li čísla $x, y > 0$ relativní chybu nejvýše $\varepsilon > 0$, pak platí

$$\varepsilon_{ax+y} \leq \varepsilon, \qquad \varepsilon_{x-y} \leq \frac{x+y}{|x-y|}\varepsilon,$$
$$\varepsilon_{x\cdot y} \leq 2\varepsilon, \qquad \varepsilon_{x/y} \leq 2\varepsilon,$$
$$\varepsilon_{1/x} = \varepsilon.$$

Definice.
Uvažujme číslo $a \in I\!R$, popřípadě $a = \pm\infty$, nechť f, g jsou dvě funkce definované na nějakém (prstencovém) okolí bodu a.
Řekneme, že $f \in O(g)$ pro $x \to a$, jestliže existuje nějaká konstanta C a prstencové okolí P bodu a takové, že $|f| \leq C|g|$ na P.

Fakt.
Jestliže $b \geq a > 0$ a $\alpha, \beta \in I\!R$, tak
(i) $\beta h^b = O(h^a)$;
(ii) $\alpha h^a + O(h^b) \sim \alpha h^a$
pro $h \to 0$, popř. $h \to 0^+$.

Fakt.
(i) Pro $a > 0$ a $\alpha, \beta \in I\!R$ platí $\alpha O(h^a) \pm \beta O(h^a) = O(h^a)$ pro $h \to 0$.
(ii) Pro $b \geq a > 0$ a $\alpha, \beta \in I\!R$ platí $\alpha O(h^a) \pm \beta O(h^b) = O(h^a)$ pro $h \to 0$.
(iii) Pro $a, b \geq 0$ platí $O(h^a) \cdot O(h^b) = O(h^{a+b})$ pro $h \to 0$
(iv) Pro $a \geq b \geq 0$ platí $O(h^a) \big/ h^b = O(h^{a-b})$ pro $h \to 0$.

Definice.
Pro funkci f diferencovatelnou v bodě a uvažujeme následující aproximace pro $f'(a)$:

$$f'(a) \sim \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{(dopředná diference)},$$
$$f'(a) \sim \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \qquad \text{(zpětná diference)},$$
$$f'(a) \sim \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \qquad \text{(symetrická diference)}.$$

Fakt.
Uvažujeme funkci f, která je třikrát spojitě diferencovatelná na nějakém ε-okolí U bodu a, nechť $h > 0$ splňuje $h < \varepsilon$. Pak platí následující aproximační vzorce pro $h \to 0$:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + O(h),$$
$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h} + O(h),$$
$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + O(h^2).$$

Je-li f čtyřikrát spojitě diferencovatelná na okolí bodu a, pak platí

$$f''(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} + O(h^2).$$

Přehled metod integrace:

$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$

Obdélníková metoda $E = O(h)$

$$R_l(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h f(x_i)$$
$$R_r(n) = \sum_{i=1}^{n} h f(x_i)$$

Lichoběžníková metoda $E = O(h^2)$

$$T(n) = \tfrac{1}{2}h\Big[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} 2f(x_i) + f(x_n)\Big]$$

Simpsonova metoda $E = O(h^4)$

$$S(n) = \tfrac{1}{3}h\Big[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n/2} 4f(x_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n/2-1} 2f(x_{2i}) + f(x_n)\Big]$$

Věta.

Uvažujme funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$, označme $M_1 = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f'(x)|$. Pokud integrál $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ aproximujeme obdélníkovou metodou, tak máme následující odhady:

$$|I - R_l(n)| \le \frac{1}{2}(b-a)^2 M_1 \frac{1}{n} = \frac{1}{2}(b-a)M_1 h,$$
$$|I - R_r(n)| \le \frac{1}{2}(b-a)^2 M_1 \frac{1}{n} = \frac{1}{2}(b-a)M_1 h$$

pro $h = \frac{b-a}{n}$.

Definice.

Řekneme, že nějaká metoda I_n pro aproximování integrálu je **řádu** p pro $p \in \mathbb{N}$, pokud pro každou funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje $C > 0$ splňující

$$\Big| \int\limits_a^b f(x)\,dx - I_n \Big| \le C \frac{1}{n^p}.$$

Tedy $|I - I_h|$ je $O(h^p)$ pro $h \to 0^+$.