DRN: ODR numericky

Algoritmus (Eulerova metoda (Euler forward formula)).
Zadána rovnice $y' = f(x,y)$ na $\langle x_0, x_0+T\rangle$, počáteční podmínka y_0 a $n \in \mathbb{N}$.
0. Nastavíme $h = \frac{T}{n}$.
1. x_0, y_0 jsou ze zadání.
2. Pro $i = 0,\dots,n-1$ definujeme
$x_{i+1} = x_i + h$,
$y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)\cdot h$.

Definice.
Uvažujme nějakou metodu pro řešení Cauchyho úloh $y' = f(x,y(x))$, $y(x_0) = y_0$.
Pro konkrétní úlohu na $\langle x_0, x_0+T\rangle$ s řešením $y(x)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť metoda generuje odhady $\{y_i\}$ v bodech příslušné sítě $\{x_i\}$, označme pak $E_n = \max\limits_i |y(x_i) - y_i|$.
Metoda je **konvergentní**, pokud pro všechny úlohy s Lipschitzovskou f příslušná chyba splňuje $E_n \to 0$.

Definice.
Uvažujme jednokrokovou metodu pro řešení počátečních (Cauchyho) úloh, která pro rovnici $y' = f(x,y(x))$ a bod (x^*,y^*) generuje odhad $\Phi_f(x^*,y^*,h)$ pro hodnotu odpovídajícího řešení v bodě x^*+h.
Pro konkrétní rovnici $y' = f(x,y)$ definujeme **lokální chybu metody** jako

$$d_f(x^*,y^*,h) = y_*(x^*+h) - \Phi_f(x^*,y^*,h)$$

pro všechna $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ a všechny velikosti kroku $h > 0$ takové, že počáteční úloha $y' = f(x,y)$, $y(x^*) = y^*$ má řešení $y_*(x)$ na $\langle x^*, x^*+h\rangle$.

Definice.
Uvažujme jednokrokovou metodu pro řešení počátečních (Cauchyho) úloh, která pro rovnici $y' = f(x,y(x))$ a bod (x^*,y^*) generuje odhad $\Phi_f(x^*,y^*,h)$ pro hodnotu odpovídajícího řešení v bodě x^*+h.
Řekneme, že tato metoda **je řádu** p, popř. že má chybu řádu p, jestliže platí následující: Pro každou diferenciální rovnici $y' = f(x,y)$ a obdélník $I\times J$ takový, že f je Lipschitzovská vzhledem k y a dostatečně hladká na $I\times J$, existuje $C>0$ splňující

$$|d_f(x^*,y^*,h)| \le Ch^{p+1}$$

pro všechna $(x^*,y^*) \in I\times J$ a $h>0$ takové, že $(x^*+h, \Phi_f(x^*,y^*,h)) \in I\times J$.

Věta.
Eulerova metoda konverguje a je řádu 1 pro počáteční úlohy, které mají f s derivací omezenou na omezených množinách.

Algoritmus (Heunův vzorec (Heun formula, improved Euler formula)).
Zadána rovnice $y' = f(x,y)$ na $\langle x_0, x_0+T\rangle$, počáteční podmínka y_0 a $n \in \mathbb{N}$.
0. Nastavíme $h = \frac{T}{n}$.
1. x_0, y_0 jsou ze zadání.
2. Pro $i = 0,\dots,n-1$ definujeme $x_i = x_0 + ih$ a dále
a) Odhadneme směrnici $y'(x_i)$: $k_1 = f(x_i,y_i)$.
b) Odhadneme y_{i+1}: $y^*_{i+1} = y_i + k_1 h$,
pak odhadneme směrnici $y'(x_{i+1})$: $k_2 = f(x_{i+1}, y^*_{i+1})$.
c) Spočítáme $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1+k_2)\cdot h$.

Fakt.
Heunova metoda je řádu 2.

Algoritmus (RK2 (midpoint, modified Euler formula, improved polygon)).
Zadána rovnice $y' = f(x, y)$ na $\langle x_0, x_0 + T\rangle$, počáteční podmínka y_0 a $n \in I\!N$.
0. Nastavíme $h = \frac{T}{n}$.
1. x_0, y_0 jsou ze zadání.
2. Pro $i = 0, \dots, n-1$ definujeme $x_i = x_0 + ih$ a dále
a) Odhadneme směrnici $y'(x_i)$: $k_1 = f(x_i, y_i)$.
b) Odhadneme $y(x_i + \frac{1}{2}h)$: $y^*_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{2}k_1 h$,
pak odhadneme směrnici $y'(x_i + \frac{1}{2}h)$: $k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y^*_{i+1/2})$.
c) Spočítáme $y_{i+1} = y_i + k_2 h$.

Fakt.
Metoda RK2 je řádu 2.

Definice.
Explicitní metoda Runge-Kutty pro řešení počáteční úlohy $y' = f(x, y)$ je dána volbou konstant

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \\
c_N & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{N,N-1} & \\
\hline
 & w_1 & w_2 & \cdots & w_{N-1} & w_N
\end{array}$$

Zde N je počet kroků, c_j definuje nody, a_{jl} tvoří matici metody a w_j jsou váhy.
Při výpočtu y_{i+1} pomocí y_i se nejprve se odhadují směrnice v rozličných bodech,

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i),\\
k_2 &= f(x_i + c_2 h, y_i + h a_{21} k_1),\\
k_3 &= f(x_i + c_3 h, y_i + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)),\\
&\vdots\\
k_N &= f(x_i + c_N h, y_i + h(a_{N1}k_1 + a_{N2}k_2 + \dots + a_{N,N-1}k_{N-1})),
\end{aligned}$$

tyto odhady zprůměrujeme $k = \sum\limits_{j=1}^{N} w_j k_j$ a pak odhadujeme $y_{i+1} = y_i + k \cdot h$.

Algoritmus (RK4).
Zadána rovnice $y' = f(x, y)$ na $\langle x_0, x_0 + T\rangle$, počáteční podmínka y_0 a $n \in I\!N$.
0. Nastavíme $h = \frac{T}{n}$.
1. x_0, y_0 jsou ze zadání.
2. Pro $i = 0, \dots, n-1$ definujeme $x_i = x_0 + ih$ a dále
a) Odhadneme směrnici $y'(x_i)$: $k_1 = f(x_i, y_i)$.
b) Odhadneme $y(x_i + \frac{1}{2}h)$: $y^*_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{2}k_1 h$
a pak směrnici $y'(x_i + \frac{1}{2}h)$: $k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, {y_{i+1/2}}^*)$.
c) Znovu (a lépe?) odhadneme $y(x_i + \frac{1}{2}h)$: $y^{**}_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{2}k_2 h$
a pak směrnici $y'(x_i + \frac{1}{2}h)$: $k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y^{**}_{i+1/2})$.
d) Odhadneme $y(x_i + h)$: $y^*_{i+1} = y_i + k_3 h$
a pak směrnici $y'(x_{i+1})$: $k_4 = f(x_{i+1}, y^*_{i+1})$.
e) Spočítáme $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot h$.

Fakt.
Metoda RK4 je řádu 4.