DRN: Lineální ODR řádu n

Definice.
Lineární obyčejná diferenciální rovnice řádu n je ODR zapsaná ve tvaru
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$
kde $a_{n-1}, \ldots , a_0, b$ jsou nějaké funkce.
Tato rovnice se nazývá **homogenní**, jestliže $b(x) = 0$.
Je-li dána lineární ODR $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, pak definujeme její **přidruženou homogenní rovnici** jako $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Věta. (o existenci a jednoznačnosti pro lineární ODR)
Uvažujme lineární ODR
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \qquad \text{(L)}$$
Jsou-li $a_{n-1}, \ldots , a_0, b$ spojité na otevřeném intervalu I, pak pro všechna $x_0 \in I$
a všechna $y_0, y_1, \ldots , y_{n-1} \in I\!R$ existuje řešení počáteční úlohy
$$\text{(L)},\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots ,y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$
na I a je tam jednoznačné.

Věta. (o struktuře množiny řešení homogenní lineární ODR)
Uvažujme homogenní lineární ODR
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$
Jestliže jsou a_i spojité na otevřeném intervalu I, pak je množina všech řešení této rovnice na I vektorový prostor dimenze n.

Definice.
Uvažujme homogenní lineární ODR
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$
Předpokládejme, že a_i jsou spojité na otevřeném intervalu I.
Fundamentálním systémem řešení této rovnice na I je libovolná báze prostoru všech řešení této rovnice na I.

Definice.
Nechť $y_1, y_2, \ldots , y_n$ jsou $(n-1)$-krát diferencovatelné funkce. Definujeme jejich **Wronskián** jako
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Věta.
Uvažujme homogenní lineární ODR
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$
kde a_i jsou spojité na otevřeném intervalu I.
Nechť $y_1, y_2, \ldots , y_n$ jsou řešení této rovnice na I, nechť W je jejich Wronskián.
Tyto funkce tvoří lineárně nezávislou množinu (tedy fund. systém) právě tehdy, když $W(x) \neq 0$ na I, a právě tehdy, když $W(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in I$.

Definice.
Lineární ODR s konstantními koeficienty jsou lineární ODR, u kterých jsou $a_0(x) = a_0$, $a_1(x) = a_1$, $\ldots$, $a_{n-1}(x) = a_{n-1}$ konstantní funkce.

Definice.
Uvažujme homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Definujeme její **charakteristický polynom** jako

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Definujeme její **charakteristickou rovnici** jako $p(\lambda) = 0$. Řešení této rovnice se zvou **charakteristická čísla** dané ODR.

Fakt.
Uvažujme homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Nechť λ_0 je její charakteristické číslo. Pak $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ je řešením této rovnice.
Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ různá charakteristická čísla této rovnice, pak $\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_N x}\}$ je lineárně nezávislá množina řešení.

Fakt.
Uvažujme homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Nechť λ_0 je její charakteristické číslo násobnosti m. Pak $e^{\lambda_0 x}$, $x\,e^{\lambda_0 x}$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$ jsou její řešení a tvoří lineárně nezávislou množinu.

Věta. (o fundamentálním systému pro lineární ODR)
Uvažujme homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Nechť λ je její charakteristické číslo násobnosti m.
(1) Je-li $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$, pak jsou $e^{\alpha x}$, $x\,e^{\alpha x}$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\alpha x}$ řešení přidružené homogenní rovnice na $\mathbb{R}$ a jsou lineárně nezávislá.
(2) Je-li $\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$, jsou $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $x\,e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $x\,e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\ldots$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ řešení přidružené homogenní rovnice na $\mathbb{R}$ a jsou lineárně nezávislá.
(3) Množina funkcí z (1) a (2) pro všechna charakteristická čísla je lineárně nezávislá a tvoří fundamentální systém dané rovnice na $\mathbb{R}$.

Věta. (o struktuře řešení lineární ODR)
Nechť y_p je nějaké partikulární řešení dané lineární ODR na otevřeném intervalu I.
Funkce y_0 je řešením této rovnice na I právě tehdy, pokud $y_0 = y_p + y_h$ pro nějaké řešení y_h přidružené homogenní rovnice na I.
Proto je-li y_h nějaké obecné řešení přidružené homogenní rovnice na I, pak $y = y_p + y_h$ je obecné řešení dané rovnice na I.

Věta. (o odhadu řešení pro speciální pravou stranu)
Uvažujme lineární ODR s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b(x).$$

Předpokládejme, že $b(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\sin(\beta x)]$ pro polynomy P, Q, označme
$d = \max(\mathrm{st}(P), \mathrm{st}(q))$.
Nechť m je násobnost čísla $\lambda = \alpha \pm \beta i$ jako charakteristického čísla přidružené homogenní rovnice ($m = 0$ pokud to vůbec není char. číslo).
Pak existují polynomy $\widetilde{P}, \widetilde{Q}$ stupně nejvýše d, že

$$y(x) = x^m e^{\alpha x}[\widetilde{P}(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}(x)\sin(\beta x)]$$

je řešení dané rovnice na $\mathbb{R}$.

Snažší tvary pro neúplné pravé strany:
- $b(x) = P(x) \implies y(x) = x^m \widetilde{P}(x)$, kde m je násobnost $\lambda = 0$.
- $b(x) = P(x)e^{\alpha x} \implies y(x) = x^m \widetilde{P}(x)e^{\alpha x}$, kde m je násobnost $\lambda = \alpha$;
- $b(x) = P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\sin(\beta x) \implies y(x) = x^m[\widetilde{P}(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}(x)\sin(\beta x)]$, kde m je násobnost $\lambda = \beta i$;

Věta. (princip superpozice)
Uvažujme lineární ODR s levou stranou

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

Nechť y_1 je řešení $L(y) = b_1(x)$ na otevřeném intervalu I
a y_2 je řešení $L(y) = b_2(x)$ na I.
Pak $y_1 + y_2$ je řešení $L(y) = b_1(x) + b_2(x)$ na I.

Algoritmus (metoda variace konstanty pro řešení lineárních ODR).
Zadána rovnice $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b(x)$.
0. Metodou charakteristických čísel najdeme obecné řešení y_h přidružené homogenní rovnice. Má tvar $y_h(x) = c_1 \cdot u_1(x) + \ldots + c_n \cdot u_n(x)$.
1. Variace konstanty: Hledá se řešení ve tvaru $y(x) = c_1(x) \cdot u_1(x) + \ldots + c_n(x) \cdot u_n(x)$. Neznámé funkce $c_i(x)$ najdeme řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
c_1'(x)u_1(x) + \ldots + c_n'(x)u_n(x) &= 0\\
c_1'(x)u_1'(x) + \ldots + c_n'(x)u_n'(x) &= 0\\
&\vdots\\
c_1'(x)u_1^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)u_n^{(n-2)}(x) &= 0\\
c_1'(x)u_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)u_n^{(n-1)}(x) &= b(x)
\end{aligned}$$

Vyřešíme pro $c_i'(x)$, jejich integrováním získáme $c_i(x)$, které se dosadí do $y(x) = \sum c_i(x)u_i(x)$.
2. Pokud vezmeme jako $c_i(x)$ jedny konkrétní primitivní funkce, dostaneme takto jedno partikulární řešení $y_p(x)$, obecné řešení pak je $y = y_p + y_h$.
Pokud se při hledání $c_i(x)$ použijí při integraci $+C_i$, po dosazení do $y(x) = \sum c_i(x)u_i(x)$ vyjde rovnou obecné řešení.