DRN: Kořeny funkce numericky

Definice.
Kořenem funkce f rozumíme libovolné číslo r splňující $f(r) = 0$.

Fakt.
Nechť f je funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tj. $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka) a f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak f musí mít v intervalu $\langle a, b\rangle$ kořen.

Algoritmus (metoda bisekce pro hledání kořene funkce)**.**
Zadána funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a tolerance ε.
Předpoklad: Znaménka $f(a)$ a $f(b)$ jsou různá.
0. Zavedeme $a_0 = a$, $b_0 = b$. Nechť $k = 0$.
1. Předpoklad: znaménka $f(a_k)$ a $f(b_k)$ jsou různá. Nechť $m_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$.
2. Jestliže $f(m_k) = 0$ nebo $|b_k - a_k| < \varepsilon$, tak konec, **výstup** je m_k.
Jinak:
Mají-li $f(a_k)$ a $f(m_k)$ různá znaménka, nechť $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = m_k$,
zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.
Mají-li $f(m_k)$ a $f(b_k)$ různá znaménka, nechť $a_{k+1} = m_k$, $b_{k+1} = b_k$,
zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.

Algoritmus (Newtonova metoda pro hledání kořene funkce)**.**
Zadána diferencovatelná funkce f a tolerance ε.
0. Zvolíme x_0. Nechť $k = 0$.
1. Nechť $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.
Jestliže $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nebo také $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$, tak skončíme, **výstup** je x_{k+1}.
Jinak zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.

Věta.
Nechť f je funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $f(a) \cdot f(b) < 0$. Předpokládejme, že f je na (a, b) dvakrát spojitě diferencovatelná a $f' \neq 0$, $f'' \neq 0$ na (a, b).
Jestliže je $x_0 \in (a, b)$ zvoleno tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, pak posloupnost $\{x_n\}$ generovaná Newtonovou metodou konverguje k nějakému kořeni $r \in \langle a, b\rangle$ funkce f.

Tradiční ukončovací podmínky:
- $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ absolutní rozdíl
- $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} < \varepsilon$ relativní rozdíl
- $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$ funkční hodnota (reziduum)

Fakt.
Nechť f je funkce a r je její kořen. Předpokládejme, že existuje okolí U bodu r a $m_1 > 0$ takové, že f je diferencovatelná na U a platí $m_1 \leq |f'|$ na U.
Pak pro $\hat{r} \in U$ platí $|r - \hat{r}| \leq \frac{1}{m_1}|f(\hat{r})|$.

Definice.
Uvažujme posloupnost $\{x_k\}$ konvergující k nějakému x_∞.
Řekneme, že $\{x_k\}$ konverguje s řádem konvergence $q > 0$, jestliže existuje C takové, že $|x_\infty - x_{k+1}| \leq C|x_\infty - x_k|^q$ pro všechna k.
Někdy se tomu říká Q-řád konvergence.

Řekneme, že $\{x_k\}$ konverguje s R-řádem konvergence $q > 0$, jestliže existuje posloupnost $\{e_k\}$ horních odhadů pro $|x_\infty - x_k|$,
tedy $|x_\infty - x_k| \leq e_k$ pro všechna k, která Q-konverguje k nule.

Definice.
Uvažujme určitou iterační metodu pro hledání kořene. Řekneme, že je to **metoda řádu** q, nebo že má **chybu řádu** q, kde $q > 0$, jestliže splňuje následující podmínku:
Když tato metoda vygeneruje posloupnost $\{x_k\}$ konvergující ke kořeni r funkce f, tento kořen je jednoduchý a funkce f je dostatečně hladká, pak $\{x_k\}$ konverguje k r s řádem q.

Věta.
Nechť spojitá funkce f na $\langle a, b\rangle$ splňuje $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Pak posloupnost $\{m_k\}$ generovaná metodou bisekce se vstupními hodnotami $x_0 = a$, $y_0 = b$ konverguje ke kořeni r funkce f.
Metoda bisekce je lineárního řádu.

Věta.
Newtonova metoda je řádu 2 pro dvakrát spojitě diferencovatelné funkce.
Pro kořeny vyšší násobnosti je metodou řádu 1.

Algoritmus (metoda sečen pro hledání kořene funkce)**.**
Zadána spojitá funkce f a tolerance ε.
0. Zvolíme x_0, x_1. Nechť $k = 1$.
1. Nechť $x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$.
Jestliže $|x_{k+1} - r_k| < \varepsilon$ nebo $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$, algoritmus končí, **výstup** je x_{k+1}.
Jinak zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.

Věta.
Metoda sečen je řádu $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6$ pro dvakrát spojitě diferencovatelné funkce.

Pro kořeny vyšší násobnosti je metodou řádu 1.

Definice.
Nechť φ je funkce. Jejím **pevným bodem** rozumíme libovolné číslo x_f splňující $\varphi(x_f) = x_f$.

Fakt.
Jestliže je funkce φ spojitá na uzavřeném omezeném intervalu I a platí $\varphi[I] \subseteq I$, pak má φ pevný bod $x_f \in I$.

Algoritmus (iterační metoda pro hledání pevného bodu)**.**
Zadána spojitá funkce φ a tolerance ε.
0. Zvolíme x_0. Nechť $k = 0$.
1. Nechť $x_{k+1} = \varphi(x_k)$.
Jestliže $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, tak skončíme, **výstup** je x_{k+1}.
Jinak zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.

Věta.
Nechť φ je funkce, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ pro $k \in \mathbb{N}$. Jestliže $x_k \to x_f$ a φ je spojitá v x_f, pak je x_f pevný bod φ.

Definice.
Nechť φ je funkce na intervalu I. Řekneme, že je tam **kontraktivní** nebo že je to **kontrakce**, jestliže existuje $q < 1$ takové, že pro všechna $x, y \in I$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|.$$

Věta. (Banachova o pevném bodě)
Nechť φ je kontraktivní funkce na $I = \langle a, b\rangle$ s koeficientem q taková, že $\varphi[I] \subseteq I$. Pak v I existuje právě jeden pevný bod x_f funkce φ.
Navíc pro všechny volby $x_0 \in I$ posloupnost daná $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ konverguje k x_f a platí

$$|x_f - x_{k+1}| \leq q|x_f - x_k|.$$

Věta.
Nechť funkce φ definovaná na intervalu I má spojitou derivaci na vnitřku I^O intervalu I.
Jestliže existuje $q < 1$ takové, že $|\varphi'(t)| \leq q$ na I^O, pak je φ kontrakce na I s koeficientem q.

Algoritmus (metoda relaxace pro hledání pevného bodu)**.**
Zadána spojitá funkce φ a tolerance ε.
1. Zvolíme nějaký relaxační parametr λ a aplikujeme iterační metodu na
$\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)x$.