

DRN: Soustavy lineárních ODR

Definice.

Soustava lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty je soustava ve tvaru

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\&\vdots \\y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(x)\end{aligned}$$

kde $b_i(x)$ jsou pravé strany, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty.

Počáteční či Cauchyho úloha pro tuto soustavu má počáteční podmínky

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, y_2(x_0) = y_{2,0}, \dots, y_n(x_0) = y_{n,0}.$$

Soustava se nazývá **homogenní**, pokud $b_i(x) = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

Věta. (o existenci a jednoznačnosti pro soustavy)

Uvažujme soustavu LODR 1. řádu.

Jsou-li $b_i(x)$ spojité na otevřeném intervalu I , pak pro každé $x_0 \in I$ a všechna

$y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0} \in \mathbb{R}$ existuje řešení příslušné počáteční (Cauchyho) úlohy na I a je jednoznačné.

Fakt.

Každou soustavu n lineárních ODR 1. řádu lze eliminací převést ekvivalentně na jednu lineární ODR řádu n .

Každou lineární diferenciální rovnici řádu n lze ekvivalentně převést na soustavu n lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.

Soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{aligned}$$

lze zapsat jako $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$, kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ je **matice soustavy**,

$\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$ je **vektor pravých stran**, neznámá je $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$,

pak $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$.

Soustava je homogenní, pokud $\vec{b} = \vec{0}$, kde $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times 1}$.

Poč. podmínky jsou $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$.

Věta. (o struktuře množiny řešení pro homogenní soustavy)

Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Množina všech řešení této soustavy na nějakém otevřeném intervalu I je vektorový prostor dimenze n .

Definice.

Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Fundamentální systém řešení této soustavy na otevřeném intervalu I je libovolná báze prostoru všech řešení této soustavy na I .

Je-li $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ fundamentální systém řešení na I , definujeme jeho **fundamentální matici** na I jako $Y(x) = (\vec{y}_1(x) \ \cdots \ \vec{y}_n(x))$ (matice $n \times n$).

Definice.

Uvažujme $n \times n$ matici A .

Číslo λ se nazývá **vlastní číslo** matice A , jestliže existuje nenulový vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Vektorům \vec{v} s touto vlastností pak říkáme **vlastní vektory** A příslušné/přidružené k vlastnímu číslu λ .

Věta.

Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Jestliže je λ_0 vlastní číslo A s vlastním vektorem \vec{v} , pak $\vec{y} = \vec{v}e^{\lambda_0 x}$ je řešením dané soustavy na \mathbb{R} .

Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ různá vlastní čísla matice A , pak odpovídající řešení tvoří lineárně nezávislou množinu.

Věta.

Uvažujme homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic $\vec{y}' = A\vec{y}$ s konstantními koeficienty. Pokud mají všechna vlastní čísla A záporné reálné části, pak je rovnovážný bod (ekvilibrum) $\vec{y}_0 = \vec{0}$ asymptoticky stabilní. Jinak je nestabilní.

Fakt.

Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Nechť λ_0 je vlastní číslo A a \vec{v} příslušný vlastní vektor.

Jestliže je λ_0 komplexní číslo (tedy $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$), pak $\text{Re}(\vec{v}e^{\lambda_0 x})$ a $\text{Im}(\vec{v}e^{\lambda_0 x})$ jsou lineárně nezávislá řešení dané soustavy na \mathbb{R} .

Fakt.

Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Nechť λ_0 je vlastní číslo A s násobností m a \vec{v} příslušný vlastní vektor.

Definujme vektory takto:

$$\vec{v}_1 = \vec{v},$$

$$\vec{v}_2 \text{ řeší } (A - \lambda_0 E_n)\vec{x} = \vec{v}_1,$$

$$\vec{v}_3 \text{ řeší } (A - \lambda_0 E_n)\vec{x} = \vec{v}_2,$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_m \text{ řeší } (A - \lambda_0 E_n)\vec{x} = \vec{v}_{m-1}.$$

Pak jsou následující funkce řešeními dané soustavy na \mathbb{R} a tvoří lineárně nezávislou množinu:

$$\vec{y} = \vec{v}_1 e^{\lambda_0 x},$$

$$\vec{y} = \left[\int (\vec{v}_1) dx + \vec{v}_2 \right] e^{\lambda_0 x} = (\vec{v}_1 x + \vec{v}_2) e^{\lambda_0 x},$$

$$\vec{y} = \left[\int (\vec{v}_1 x + \vec{v}_2) dx + \vec{v}_3 \right] e^{\lambda_0 x} = \left(\frac{1}{2} \vec{v}_1 x^2 + \vec{v}_2 x + \vec{v}_3 \right) e^{\lambda_0 x},$$

$$\vdots$$

$$\vec{y} = \left(\frac{1}{(m-1)!} \vec{v}_1 x^{m-1} + \frac{1}{(m-2)!} \vec{v}_2 x^{m-2} + \dots + \vec{v}_{m-1} x + \vec{v}_m \right) e^{\lambda_0 x}.$$

Věta. (o struktuře řešení pro soustavy)

Uvažujme soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$.

Nechť \vec{y}_p je nějaké jej řešení na intervalu I .

Pak \vec{y}_0 je také jejím řešením na I právě tehdy, když $\vec{y}_0 = \vec{y}_p + \vec{y}_h$ pro nějaké řešení y_h soustavy $\vec{y}' = A\vec{y}$ na I .

Proto je-li y_h nějaké obecné řešení přidružené homogenní soustavy na I , pak $\vec{y}_p + \vec{y}_h$ je obecné řešení dané soustavy na I .

Algoritmus (metoda variace konstant pro soustavu lineárních ODR).

Zadána soustava $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$.

1. Nejprve najdeme obecné řešení \vec{y}_h přidružené homogenní soustavy $\vec{y}' = A\vec{y}$: $\vec{y}_h = Y(x) \cdot \vec{c}$ neboli

$$y_{1h}(x) = c_1 u_1(x) + c_2 v_1(x) + \dots,$$

$$y_{2h} = \dots,$$

$$y_{nh}(x) = c_1 u_n(x) + c_2 v_n(x) + \dots$$

2. a) Variace řádková: Hledáme řešení ve tvaru

$$y_1(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)v_1(x) + \dots,$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = c_1(x)u_n(x) + c_2(x)v_n(x) + \dots$$

Neznámé funkce $c_i(x)$ najdeme řešením soustavy rovnic

$$c'_1(x)u_1(x) + c'_2(x)v_1(x) + \dots = b_1(x),$$

$$\vdots$$

$$c'_1(x)u_n(x) + c'_2(x)v_n(x) + \dots = b_n(x).$$

Odtud se najde (eliminací, Kramerem) $c'_1(x)$, $c'_2(x)$, atd., integrací se získá $c_1(x)$, $c_2(x)$, atd, to se dosadí do zvariovaných y_i a dostane se y_{1p}, \dots, y_{np} . Obecné řešení je $y_i = y_{ip} + y_{ih}$.

b) Variace vektorová: Hledáme řešení ve tvaru $\vec{y} = Y(x) \cdot \vec{c}(x)$.

Vznikne rovnice $Y(x) \cdot \vec{c}'(x) = \vec{b}(x)$, odtud $\vec{c}'(x) = Y(x)^{-1}\vec{b}(x)$, integrujeme po řádcích, dosadíme $\vec{c}(x)$ do $\vec{y}(x) = Y(x) \cdot \vec{c}(x)$, vyjde \vec{y}_p , pak obecné řešení $\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h$.

Definice.

Předpokládejme, že konstantní funkce $\vec{y}_s(t) = \vec{y}_0$ je stacionárním řešením soustavy $\vec{y}' = F(t, \vec{y})$. Jinak řečeno, \vec{y}_0 je její rovnovážný bod (ekvilibrium).

Řekneme, že toto stacionární řešení je (asymptoticky) **stabilní**, jestliže existují $t_s \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ takové, že každé řešení $\vec{y}(t)$ splňující $\|\vec{y}(T) - \vec{y}_s(T)\| < \delta$ pro nějaké $T \geq t_s$ musí nutně existovat na (T, ∞) a konvergovat k \vec{y}_0 pro $t \rightarrow \infty$.

Řekneme, že \vec{y}_s je **nestabilní**, pokud není stabilní.

Věta.

Uvažujme homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic $\vec{y}' = A\vec{y}$ s konstantními koeficienty. Pokud mají všechna vlastní čísla A záporné reálné části, pak je rovnovážný bod (ekvilibrium) $\vec{y}_0 = \vec{0}$ asymptoticky stabilní.

Jinak je nestabilní.

Definice.

Uvažujme řešení $\vec{y}(t)$, $t \in I$ nějaké soustavy diferenciálních rovnic. Definujeme **trajektorii** neboli **orbitu** tohoto řešení jako

$$\{\vec{y}(t) \in \mathbb{R}^n; t \in I\}.$$

