DRN: Soustavy lineárních ODR

Definice.
Soustava lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty je soustava ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{aligned}$$

kde $b_i(x)$ jsou pravé strany, $a_{ij} \in I\!R$ jsou koeficienty.

Počáteční či Cauchyho úloha pro tuto soustavu má počáteční podmínky
$y_1(x_0) = y_{1,0}$, $y_2(x_0) = y_{2,0}$, ... , $y_n(x_0) = y_{n,0}$.

Soustava se nazývá **homogenní**, pokud $b_i(x) = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

Věta. (o existenci a jednoznačnosti pro soustavy)
Uvažujme soustavu LODR 1. řádu.
Jsou-li $b_i(x)$ spojité na otevřeném intervalu I, pak pro každé $x_0 \in I$ a všechna $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0} \in I\!R$ existuje řešení příslušné počáteční (Cauchyho) úlohy na I a je jednoznačné.

Fakt.
Každou soustavu n lineárních ODR 1. řádu lze eliminací převést ekvivalentně na jednu lineární ODR řádu n.
Každou lineární diferenciální rovnici řádu n lze ekvivalentně převést na soustavu n lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.

Soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{aligned}$$

lze zapsat jako $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$, kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ je **matice soustavy**,

$\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$ je **vektor pravých stran**, neznámá je $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$,

pak $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$.

Soustava je homogenní, pokud $\vec{b} = \vec{0}$, kde $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}$.

Poč. podmínky jsou $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$.

Věta. (o struktuře množiny řešení pro homogenní soustavy)
Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Množina všech řešení této soustavy na nějakém otevřeném intervalu I je vektorový prostor dimenze n.

Definice.
Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Fundamentální systém řešení této soustavy na otevřeném intervalu I je libovolná báze prostoru všech řešení této soustavy na I.
Je-li $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ fundamentální systém řešení na I, definujeme jeho **fundamentální matici** na I jako
$Y(x) = (\, \vec{y}_1(x) \quad \cdots \quad \vec{y}_n(x)\,)$ (matice $n \times n$).

Definice.
Uvažujme $n \times n$ matici A.
Číslo λ se nazývá **vlastní číslo** matice A, jestliže existuje nenulový vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.
Vektorům $\vec{v}$ s touto vlastností pak říkáme **vlastní vektory** A příslušné/přdružené k vlastnímu číslu λ.

Věta.
Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Jestliže je λ_0 vlastní číslo A s vlastním vektorem $\vec{v}$, pak $\vec{y} = \vec{v}\, e^{\lambda_0 x}$ je řešením dané soustavy na $\mathbb{R}$.
Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ různá vlastní čísla matice A, pak odpovídající řešení tvoří lineárně nezávislou množinu.

Věta.
Uvažujme homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ s konstantními koeficienty.
Pokud mají všechna vlastní čísla A záporné reálné části, pak je rovnovážný bod (ekvilibrium) $\vec{y}_0 = \vec{0}$ asymptoticky stabilní.
Jinak je nestabilní.

Fakt.
Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Nechť λ_0 je vlastní číslo A a $\vec{v}$ příslušný vlastní vektor.
Jestliže je λ_0 komplexní číslo (tedy $\mathrm{Im}(\lambda_0) \neq 0$), pak $\mathrm{Re}(\vec{v}e^{\lambda_0 x})$ a $\mathrm{Im}(\vec{v}e^{\lambda_0 x})$ jsou lineárně nezávislá řešení dané soustavy na $\mathbb{R}$.

Fakt.
Uvažujme homogenní soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y}$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Nechť λ_0 je vlastní číslo A s násobnosti m a $\vec{v}$ příslušný vlastní vektor.
Definujme vektory takto:

$\vec{v}_1 = \vec{v}$,
$\vec{v}_2$ řeší $(A - \lambda_0 E_n)\vec{x} = \vec{v}_1$,
$\vec{v}_3$ řeší $(A - \lambda_0 E_n)\vec{x} = \vec{v}_2$,
$\vdots$
$\vec{v}_m$ řeší $(A - \lambda_0 E_n)\vec{x} = \vec{v}_{m-1}$.

Pak jsou následující funkce řešeními dané soustavy na $\mathbb{R}$ a tvoří lineárně nezávislou množinu:

$$\vec{y} = \vec{v}_1 e^{\lambda_0 x},$$
$$\vec{y} = \Big[\int (\vec{v}_1)\,dx + \vec{v}_2\Big] e^{\lambda_0 x} = (\vec{v}_1 x + \vec{v}_2)e^{\lambda_0 x},$$
$$\vec{y} = \Big[\int (\vec{v}_1 x + \vec{v}_2)\,dx + \vec{v}_3\Big] e^{\lambda_0 x} = \big(\tfrac{1}{2}\vec{v}_1 x^2 + \vec{v}_2 x + \vec{v}_3\big)e^{\lambda_0 x},$$
$$\vdots$$
$$\vec{y} = \big(\tfrac{1}{(m-1)!}\vec{v}_1 x^{m-1} + \tfrac{1}{(m-2)!}\vec{v}_2 x^{m-2} + \dots + \vec{v}_{m-1}x + \vec{v}_m\big)e^{\lambda_0 x}.$$

Věta. (o struktuře řešení pro soustavy)
Uvažujme soustavu lineárních ODR $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$.
Nechť $\vec{y}_p$ je nějaké jej řešení na intervalu I.
Pak $\vec{y}_0$ je také jejím řešením na I právě tehdy, když $\vec{y}_0 = \vec{y}_p + \vec{y}_h$ pro nějaké řešení y_h soustavy $\vec{y}' = A\vec{y}$ na I.
Proto je-li y_h nějaké obecné řešení přidružené homogenní soustavy na I, pak $\vec{y}_p + \vec{y}_h$ je obecné řešení dané soustavy na I.

Algoritmus (metoda variace konstant pro soustavu lineárních ODR)**.**
Zadána soustava $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$.
1. Nejprve najdeme obecné řešení $\vec{y}_h$ přidružené homogenní soustavy $\vec{y}' = A\vec{y}$: $\vec{y}_h = Y(x) \cdot \vec{c}$ neboli
$y_{1h}(x) = c_1 u_1(x) + c_2 v_1(x) + \dots,$
$y_{2h} = \dots,$
$y_{nh}(x) = c_1 u_n(x) + c_2 v_n(x) + \dots$
2. a) Variace řádková: Hledáme řešení ve tvaru
$$y_1(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)v_1(x) + \dots,$$
$$\vdots$$
$$y_n(x) = c_1(x)u_n(x) + c_2(x)v_n(x) + \dots.$$
Neznámé funkce $c_i(x)$ najdeme řešením soustavy rovnic
$$c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)v_1(x) + \dots = b_1(x),$$
$$\vdots$$
$$c_1'(x)u_n(x) + c_2'(x)v_n(x) + \dots = b_n(x).$$
Odtud se najde (eliminací, Kramerem) $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, atd., integrací se získá $c_1(x)$, $c_2(x)$, atd, to se dosadí do zvariovaných y_i a dostane se $y_{1p}, \dots, y_{np}$. Obecné řešení je $y_i = y_{ip} + y_{ih}$.

b) Variace vektorová: Hledáme řešení ve tvaru $\vec{y} = Y(x) \cdot \vec{c}(x)$.
Vznikne rovnice $Y(x) \cdot \vec{c}\,'(x) = \vec{b}(x)$, odtud $\vec{c}\,'(x) = Y(x)^{-1}\vec{b}(x)$, integrujeme po řádcích, dosadíme $\vec{c}(x)$ do $\vec{y}(x) = Y(x) \cdot \vec{c}(x)$, vyjde $\vec{y}_p$, pak obecné řešení $\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h$.

Definice.
Předpokládejme, že konstantní funkce $\vec{y}_s(t) = \vec{y}_0$ je stacionárním řešením soustavy $\vec{y}\,' = F(t, \vec{y})$. Jinak řečeno, $\vec{y}_0$ je její rovnovážný bod (ekvilibrium).
Řekneme, že toto stacionární řešení je (asymptoticky) **stabilní**, jestliže existují $t_s \in I\!R$ a $\delta > 0$ takové, že každé řešení $\vec{y}(t)$ splňující $\|\vec{y}(T) - \vec{y}_s(T)\| < \delta$ pro nějaké $T \geq t_s$ musí nutně existovat na (T, ∞) a konvergovat k $\vec{y}_0$ pro $t \to \infty$.

Řekneme, že $\vec{y}_s$ je **nestabilní**, pokud není stabilní.

Věta.
Uvažujme homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ s konstantními koeficienty.
Pokud mají všechna vlastní čísla A záporné reálné části, pak je rovnovážný bod (ekvilibrium) $\vec{y}_0 = \vec{0}$ asymptoticky stabilní.
Jinak je nestabilní.

Definice.
Uvažujme řešení $\vec{y}(t)$, $t \in I$ nějaké soustavy diferenciálních rovnic. Definujeme **trajektorii** neboli **orbitu** tohoto řešení jako
$$\{\vec{y}(t) \in I\!R^n;\ t \in I\}.$$