DRN: Soustavy linárních rovnic numericky, norma

Algoritmus (GEM: Gaussova eliminace s částečným pivotováním pro převod rozšířené regulární matice na horní trojúhelníkový tvar)**.**
Zadána matice $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}$ reálných čísel, kde $m \geq n$.
0. Nastavíme $k = 1$.
1. Jestliže $c_{i,k} = 0$ pro všechna $i = k, \ldots, n$, pak čtvercová submatice $(c_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ není regulární. Algoritmus selhal a končí.
V opačném případě provedeme „pivotování“: Mezi řádky $i = k$ až n vybereme takový řádek k', který má největší hodnotu $|c_{i,k}|$. Jestliže je $k' \neq k$, zaměníme řádky k a k'.
(Nové) číslo $c_{k,k}$ se nazývá „pivot“. Pokračujeme krokem **2**.
2. Pro $i = k + 1, \ldots, n$ provedeme následující:
Pokud $c_{i,k} \neq 0$, určíme $l_{i,k} = \frac{c_{i,k}}{c_{k,k}}$, nastavíme $c_{i,k} = 0$ a pro $j > k$ nahradíme $c_{i,j}$ číslem $c_{i,j} - l_{i,k}c_{k,j}$.
3. Jestliže $k < n$, zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.
Jinak algoritmus skončil.
Výstup: matice $(c_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}$.
Poznámka: Výstup má tvar

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1,n} & \cdots & c_{1,m} \\ 0 & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2,n} & \cdots & c_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} & \cdots & c_{n-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n,n} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Fakt.
Výpočetní náročnost GEM při redukci matice $n \times (n + c)$ je rovna

$$\tfrac{2}{3}n^3 + \big(c - \tfrac{1}{2}\big)n^2 - \big(c + \tfrac{1}{6}\big)n.$$

Důsledek.
Pro konstantní c je výpočetní náročnost GEM při redukci matice $n \times (n + c)$ rovna

$$\tfrac{2}{3}n^3 + O(n^2).$$

Algoritmus (GJM: Gaussova-Jordanova eliminace pro převod rozšířené regulární matice na skoro diagonální)**.**
Zadána matice $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}$ reálných čísel, kde $m \geq n$.
0. Nastavíme $k = 1$.
1. Jestliže $c_{i,k} = 0$ pro všechna $i = k, \ldots, n$, pak čtvercová submatice $(c_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ není regulární. Algoritmus selhal a končí.
V opačném případě provedeme „pivotování“: Mezi řádky $i = k$ až n vybereme takový řádek k', který má největší možnou hodnotu $|c_{i,k}|$. Jestliže je $k' \neq k$, zaměníme řádky k a k'.
(Nové) číslo $c_{k,k}$ se nazývá „pivot“. Pokračujeme krokem **2**.
2. Pro $j > k$ nahradíme $c_{k,j}$ číslem $\frac{c_{k,j}}{c_{k,k}}$. Nastavíme $c_{k,k} = 1$.
Pro všechna $i \neq k$ provedeme následující:
Jestliže $c_{i,k} \neq 0$, tak pro $j > k$ nahradíme $c_{i,j}$ číslem $c_{i,j} - l_{i,k}c_{k,j}$; pak nastavíme $c_{i,k} = 0$.
3. Jestliže $k < n$, zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.
Jinak algoritmus skončil.
Výstup: matice $(c_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}$.
Poznámka: Výstup má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{1,n+1} & \cdots & c_{1,m} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,n+1} & \cdots & c_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{n-1,n+1} & \cdots & c_{n-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{n,n+1} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Fakt.
Výpočetní náročnost GJM při redukci matice $n \times (n+c)$ je rovna

$$n^3 + \tfrac{1}{2}(4c-3)n^2 + \tfrac{1}{2}(1-2c)n.$$

Důsledek.
Pro konstantní c je výpočetní náročnost GEM při redukci matice $n \times (n+c)$ rovna

$$n^3 + O(n^2).$$

Algoritmus (zpětný chod pro řešení soustav s horní trojúhelníkovou maticí)**.**
Zadána soustava $U\vec{x} = \vec{d}$, kde U je regulární horní trojúhelníková matice $n \times n$.
Řešení najdeme pomocí vzorců

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{d_n}{u_{n,n}}\\
x_{n-1} &= \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}\\
x_{n-2} &= \frac{d_{n-2} - u_{n-2,n}x_n - u_{n-2,n-1}x_{n-1}}{u_{n-2,n-2}}\\
&\vdots\\
x_1 &= \frac{d_1 - u_{1,n}x_n - u_{1,n-1}x_{n-1} - \dots - u_{1,2}x_2}{u_{1,1}}
\end{aligned}$$

Obecně, pro $k = n, n-1, \dots, 1$ počítáme

$$x_k = \frac{1}{u_{k,k}}\Big(d_k - \sum_{i>k} u_{k,i}x_i\Big).$$

Fakt.
Soustavu $A\vec{x} = \vec{b}$, jejíž regulární matice A je horní (resp. dolní) trojúhelníková, lze řešit zpětným (resp. dopředným) dosazením s výpočetní náročností n^2.

Definice.
Uvažujme $n \times n$ matici A reálných čísel. Řekneme, že $n \times n$ matice L, U, P jsou jejím **LUP rozkladem** (LUP factorization), jestliže P je permutační matice, U je horní trojúhelníková matice, L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a $PA = LU$.

Fakt.
Jestliže GEM bez pivotování aplikovaná na A vede na trojúhelníkovou matici U, pak $A = LU$, kde matice L má prvky $l_{i,k}$ z GEM.

Fakt.
Pro každou čtvercovou matici existuje LUP rozklad.

Algoritmus (řešení soustavy rovnic LUP rozkladem)**.**
Zadána soustava $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A je regulární (čtvercová) matice.
1. Najdeme LUP rozklad $LU = PA$.
2. Dopředným chodem najdeme $\vec{y}$ z rovnice $L\vec{y} = P\vec{b}$.
3. Zpětným chodem vyřešíme rovnici $U\vec{x} = \vec{y}$.

$$A \mapsto L, U, P \qquad (L|P\vec{b}) \mapsto \vec{y} \qquad (U|\vec{y}) \mapsto \vec{x}$$

Maximová norma pro vektory $x \in I\!R^n$:

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|.$$

Řádková norma pro $n \times n$ matice A:

$$\|A\|_\infty = \|A\|_R = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Definice.
Nechť V je vektorový prostor. Zobrazení $|\!|\!|\cdot|\!|\!|\colon V \mapsto I\!R$ se nazývá **norma**, jestliže splňuje tyto vlastnosti:
- $|\!|\!|\vec{x}|\!|\!| \geq 0$ pro všechna $\vec{x} \in I\!R^n$;
- $|\!|\!|\vec{x}|\!|\!| = 0$ právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{0}$;
- $|\!|\!|c\vec{x}|\!|\!| = |c| \cdot |\!|\!|\vec{x}|\!|\!|$ pro všechna $\vec{x} \in I\!R^n$ a $c \in I\!R$;
- $|\!|\!|\vec{x}+\vec{y}|\!|\!| \leq |\!|\!|\vec{x}|\!|\!| + |\!|\!|\vec{y}|\!|\!|$ pro všechna $\vec{x},\vec{y} \in I\!R^n$ (trojúhelníková nerovnost).

Norma na vektorovém prostoru matic se nazývá **maticová norma**, jestliže navíc splňuje
- $|\!|\!|AB|\!|\!| \leq |\!|\!|A|\!|\!| \cdot |\!|\!|B|\!|\!|$ pro všechny $A, B \in M_{n\times n}$.

Fakt.
Nechť $\vec{x}_0$ je řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$. Nechť $\vec{x}$ je nějaký jiný vektor,
označme $\vec{E}_x = \vec{x}_0 - \vec{x}$ a $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ (reziduum).
Dále označme

$$\varepsilon_x = \frac{\|\vec{E}_x\|_\infty}{\|\vec{x}_0\|_\infty} \quad \text{a} \quad \varepsilon_r = \frac{\|\vec{r}\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty}.$$

Pak

$$\varepsilon_x \leq \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \varepsilon_b.$$

Definice.
Pro $n\times n$ matici A zavádíme její **číslo podmíněnosti** (condition number) jako $\mathrm{cond}(A) = |\!|\!|A|\!|\!| \cdot |\!|\!|A^{-1}|\!|\!|$.

Věta.
Předpokládejme, že matice A_0, A a vektory $\vec{x}_0, \vec{x}$ a $\vec{b}_0, \vec{b}$ jsou svázány vztahem $A_0\vec{x}_0 = \vec{b}_0$ a $A\vec{x} = \vec{b}$. Označme $E_A = A_0 - A$, $\vec{E}_x = \vec{x}_0 - \vec{x}$ a $\vec{E}_b = \vec{b}_0 - \vec{b}$. Pak platí

$$\varepsilon_x \leq \mathrm{cond}(A)\Big(\varepsilon_b + \varepsilon_A \cdot \frac{|\!|\!|\vec{x}|\!|\!|}{|\!|\!|\vec{x}_0|\!|\!|}\Big).$$

Věta.
Jestliže matice B splňuje $|\!|\!|B|\!|\!|_M < 1$ pro některou souhlasnou maticovou formu, pak příslušná iterační metoda $\vec{x}_{k+1} = B\vec{x}_k + \vec{c}$ konverguje k $\vec{x}_f$ pro libovolnou volbu $\vec{x}_0$.

Definice.
Pro čtercovou matici A definujeme její **spektrální poloměr** jako

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \text{ vlastní číslo } A\}.$$

Věta.
Iterační metoda $\vec{x}_{k+1} = B\vec{x}_k + \vec{c}$ konverguje pro libovolnou volbu $\vec{x}_0$ právě tehdy když $\varrho(B) < 1$.

Algoritmus (JIM: Jacobiho iterace).
Zadána soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ lineárních rovnic, tolerance ε, libovolný iniciační vektor $\vec{x}_0$.
0. Nastavíme $k = 0$.
1. Vypočteme

$$(\vec{x}_{k+1})_i = -\frac{1}{a_{i,i}}\Big(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}(\vec{x}_k)_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}(\vec{x}_k)_j\Big) + \frac{b_i}{a_{i,i}}.$$

Pokud $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty \geq \varepsilon$, zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.

Algoritmus (GSM: Gauss-Seidelova iterace).
Zadána soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ lineárních rovnic, tolerance ε, libovolný iniciační vektor $\vec{x}_0$.
0. Nastavíme $k = 0$.
1. Vypočteme

$$(\vec{x}_{k+1})_i = -\frac{1}{a_{i,i}}\Big(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}(\vec{x}_{k+1})_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}(\vec{x}_k)_j\Big) + \frac{b_i}{a_{i,i}}.$$

Pokud $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty \geq \varepsilon$, zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.

Definice.
Uvažujeme $n \times n$ matici A.
Řekneme, že A je **ostře diagonálně dominantní**, jestliže pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Věta.
Jestliže je A ostře diagonálně dominantní, pak JIM i GSM konvergují pro libovolnou počáteční volbu vektoru.

Algoritmus (SOR: superrelaxační metoda (Successive OverRelaxation Method)).
Zadána soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ lineárních rovnic, tolerance ε, relaxační parametr $\omega \in I\!R$, libovolný iniciační vektor $\vec{x}_0$.
0. Nastavíme $k = 0$.
1. Vypočteme

$$(\vec{x}_{k+1})_i = (1-\omega)(\vec{x}_k)_i - \frac{\omega}{a_{i,i}}\Big(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}(\vec{x}_{k+1})_j + \sum_{j=j+1}^{n} a_{i,j}(\vec{x}_k)_j\Big) + \frac{\omega b_i}{a_{i,i}}.$$

Pokud $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty \geq \varepsilon$, zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.