DRN: Vlastní čísla a vektory numericky

Definice.
Uvažujme $n \times n$ matici A. Číslo λ se nazývá **vlastní číslo** matice A, jestliže existuje nenulový vektor $\vec{x}$ takový, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektorům $\vec{x}$ s touto vlastností pak říkáme **vlastní vektory** příslušné k číslu λ.

Fakt.
- Je-li reálná matice symetrická, pak jsou její vlastní čísla reálná.
- Je-li reálná matice diagonalizovatelná, pak existuje báze prostoru $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů.

Algoritmus (metoda mocnin pro výpočet největšího vlastního čísla a příslušného vlastního vektoru)**.**
Zadána $n \times n$ matice A, tolerance $\varepsilon > 0$ a libovolný nenulový iniciační vektor $\vec{x}_0$.
Chceme-li komplexní vlastní čísla, musíme tento vektor zvolit tak, aby každá jeho složka měla nenulovou imaginární část.
0. Nastavíme $k = 0$.
1. Vypočítáme

$$\vec{x}_{k+1} = \frac{A\vec{x}_k}{\|A\vec{x}_k\|_\infty},$$

Pokud $\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\|_\infty \geq \varepsilon$, zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.

Definice.
Pro $n \times n$ matici A a vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ definujeme **Rayleighův podíl** vzorcem

$$\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}.$$

Fakt.
Je-li $\vec{x}$ vlastní vektor matice A, pak je $\frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}$ roven příslušnému vlastnímu číslu.

Algoritmus (metoda mocnin pro výpočet největšího vlastního čísla a příslušného vlastního vektoru)**.**
Zadána $n \times n$ matice A, tolerance $\varepsilon > 0$ a libovolný nenulový iniciační vektor $\vec{x}_0$.
Chceme-li komplexní vlastní čísla, musíme tento vektor zvolit tak, aby každá jeho složka měla nenulovou imaginární část.
0. Nastavíme $k = 0$, spočítáme $l_0 = \frac{\vec{x}_0^* A \vec{x}_0}{\vec{x}_0^* \vec{x}_0}$.
1. Vypočítáme

$$\vec{y}_{k+1} = \frac{1}{l_k} A\vec{x}_k, \qquad \vec{x}_{k+1} = \frac{\vec{y}_{k+1}}{\|\vec{y}_{k+1}\|_\infty}, \qquad l_{k+1} = \frac{\vec{x}_{k+1}^* A \vec{x}_{k+1}}{\vec{x}_{k+1}^* \vec{x}_{k+1}}.$$

Pokud $\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\|_\infty \geq \varepsilon$, zvýšíme k o jedničku a jdeme zpět na krok **1**.

Věta.
Nechť A je $n \times n$ matice s vlastními čísly λ_j, přičemž $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ pro $j \geq 2$. Nechť $M = \max\limits_{j\geq 2} |\lambda_j|$.
Pro $\vec{x}_0$ nechť $\{l_k\}$, $\{\vec{x}_k\}$ jsou posloupnosti generované metodou mocnin. Pak $\{l_k\}$ konverguje k λ_1 a $\{\vec{x}_k\}$ konverguje k nějakému vlastnímu vektoru $\vec{v}$ příslušnému λ_1.
Přitom platí $|\lambda_1 - l_k| = O\big(\big[\frac{M}{|\lambda_1|}\big]^{2k}\big)$ a $\|\vec{v}_1 - \vec{x}_k\| = O\big(\big[\frac{M}{|\lambda_1|}\big]^{k}\big)$.

Algoritmus (inverzní metoda mocnin pro výpočet vlastního čísla a příslušného vlastního vektoru).
Zadána $n \times n$ matice A, reálné číslo μ, které není vlastní číslo A, tolerance $\varepsilon > 0$.
1. Najdeme $B = (A - \mu E_n)^{-1}$.
2. Metodou mocinné iterace najdeme největší vlastní číslo λ_B matice B a příslušný vlastní vektor $\vec{v}$.
Výstup: Číslo $\mu + \frac{1}{\lambda_B}$ je vlastním číslem matice A nejbližším k číslu μ s vlastním vektorem $\vec{v}$.

Algoritmus (deflační metoda pro výpočet vlastního čísla a příslušného vlastního vektoru).
Zadána symetrická $n \times n$ matice A a její vlastní čísla λ_1 až λ_N s ortogonálními vlastními vektory $\vec{v}_1$ až $\vec{v}_N$ splňujícími $\|v_i\| = 1$. Zadána tolerance $\varepsilon > 0$.
Chceme-li komplexní vlastní čísla, musíme tento vektor zvolit tak, aby každá jeho složka měla nenulovou imaginární část.
1. Vytvoříme matici $B = A - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j^T$.

2. Aplikujeme mocninnou iteraci na matici B a získáme λ_{N+1}, $\vec{x}_{N+1}$.