DRN: Ukázková semestrální písemka

1. Najděte řešení úlohy

$$y' = -3\frac{y-3}{x}, \qquad y(-1) = 5.$$

2. a) Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

b) Diskutujte jeho typické chování v nekonečnu.
c) Najděte řešení pro počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

3. Uvažujte rovnici $y'' - 2y' = 13e^{3x} + 23$.
Odhadněte obecný tvar partikulárního řešení y_p.

4. Najděte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 6y_2 \\ y_2' &= 6y_1 - 6y_2. \end{aligned}$$

Řešení

1. Z rovnice $x \neq 0$.
Separace: $\displaystyle\int \frac{dy}{y-3} = -3\int \frac{dx}{x}$. Stac. řeš. $y(x)=3$.
Integrace: $\ln|y-3| = -3\ln|x| + c = \ln\left|\frac{1}{x^3}\right| + c$, trik s $C = \pm e^c \neq 0$, proto $y(x) = \frac{C}{x^3} + 3$.
Existence: $x \neq 0$. Z postupu chceme $y \neq 3$, to je pro $C \neq 0$ pravda. Volba $C = 0$ zahrne stac. řeš.
Proto obecné řešení $y(x) = \frac{C}{x^3} + 3$, $x \neq 0$.
P.p.: $\frac{C}{(-1)^3} + 3 = 5$ dá $C = -2$. Chceme interval s $x_0 = -1$, proto
řešení $y(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$, $x \in (-\infty, 0)$.

2. a) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = -1 \pm 2i$.
$y(x) = a\,e^{-x}\sin(2x) + b\,e^{-x}\cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Pro $x \sim \infty$ je $y(x) \to 0$.
c) $y'(x) = -a\,e^{-x}\sin(2x) + 2a\,e^{-x}\cos(2x) - b\,e^{-x}\cos(2x) - 2b\,e^{-x}\sin(2x)$.
P.p.:

$$\begin{array}{r} 0 + b = 0 \\ -0 + 2a - b - 0 = 2 \end{array} \implies a = 1,\ b = 0.$$

Řešení: $y(x) = e^{-x}\sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Napravo dva různé typy, exponenciála s $\alpha = 3$ a polynom. První nástřel je tedy $A\,e^{3x} + B$.
Korekce? Levá strana (hom. rovnice) má charakteristická čísla

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = 0, 2.$$

Pravá strana: Exponenciální část je popsána parametrem $\lambda = 3$, není korekce. Polynomiální část nemá exponenciálu ani sinus/kosinus, proto je popsána parametrem $\lambda = 0$, jednonásobný překryv s charakteristickými čísly, bude korekce.
Závěr: Odhad je $y_p = A\,e^{3x} + Bx$.

4. Pracujeme s maticí

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Najdeme vlastní čísla:

$$\det\begin{pmatrix} 7-\lambda & -6 \\ 6 & -6-\lambda \end{pmatrix} = -(7-\lambda)(6+\lambda) + 36 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2) = 0.$$

Našli jsme $\lambda = -2, 3$. Najdeme vlastní vektory a řešení pro fundamentální systém:
$\lambda = -2$: $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $3v_1 - 2v_2 = 0$, volba $v_2 = 3$ dá $v_1 = 2$, $\vec{y}_a(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x}$.
$\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $2v_1 - 3v_2 = 0$, volba $v_2 = 2$ dá $v_1 = 3$, $\vec{y}_b(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x}$.
Obecné řešení $\vec{y}(x) = a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x}$ neboli

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2a\,e^{-2x} + 3b\,e^{3x}, \\ y_2(x) &= 3a\,e^{-2x} + 2b\,e^{3x},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$