$$y''' + 4y'' + 4y' = 0$$

→ obecné řeš.
→ asympt. chování v ∞

$$\to \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda(\lambda+2)^2 = 0$$

$$\to \lambda = 0, -2 \quad (2x)$$

$$\text{f.s.} \left\{ \underbrace{e^{0\cdot x}}_{1},\ e^{-2\cdot x},\ x\cdot e^{-2\cdot x} \right\}$$

$$\boxed{\text{obecné řešení}: \ y(x) = a\cdot 1 + b\cdot e^{-2x} + cxe^{-2x},\ x\in\mathbb{R}}$$

$$\to \text{pro } x\to\infty: \ y(x) \to a \qquad 0 \qquad 0 \leftarrow \frac{x}{e^{2x}}$$

$$y(x) \sim a$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

$a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$

$\to y''''' - 4y''' = 0$

$y^{(5)} - 4y''' = 0 \qquad y^{V}$

→ obecné řeš.
→ asympt. chování v ∞
typického řeš.

$\to \lambda^5 - 4\lambda^3 = 0 \iff \lambda^3(\lambda^2 - 4) = 0$

$\lambda^3(\lambda-2)(\lambda+2) = 0 \to \lambda = 0\ (3x), \pm 2$

f.s. $\{e^{0\cdot x}, x\cdot e^{0\cdot x}, x^2\cdot e^{0\cdot x}, e^{2x}, e^{-2x}\}$

$\boxed{\text{obecné řešení: } y(x) = a\cdot 1 + b\cdot x + c\cdot x^2 + d\cdot e^{2x} + f\cdot e^{-2x},\ x\in\mathbb{R}}$

$\quad a \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad 0$

→ pro $x \sim \infty$: $y(x) \sim d\cdot e^{2x}$ pokud $d\neq 0$ $\| \ y(x) = O(e^{2x}) = \Theta(e^{2x})$

→ kdyby $d=0$: $y(x) \sim cx^2$ pokud $c\neq 0$

"typické řešení"

$\to \quad y^{\prime\prime\prime\prime\prime} + 4y^{\prime\prime\prime} = 0$

$\to$ obecné řeš.
$\to$ asympt. chování typického řeš. v ∞

$$\to \lambda^5 + 4\lambda^3 = 0 \iff \lambda^3(\lambda^2+4) = 0$$

$$\lambda = 0 \ (3\times), \quad \lambda = \pm 2i$$

$$\lambda^2 = -4$$

$0 + 2i$ cos sin

$$\text{f.s. } \{e^{0\cdot x},\ x\cdot e^{0\cdot x},\ x^2 e^{0\cdot x},\ \underbrace{e^{0\cdot x}}_{1}\cdot\cos(2x),\ \underbrace{e^{0\cdot x}}_{1}\cdot\sin(2x)\}$$

$$\left[\lambda = 0+2i \longrightarrow e^{(0+2i)x} = e^{0x}\cdot e^{2ix} = 1\cdot(\cos(2x) + i\sin(2x)) \right.$$ Re, Im

obecné řešení: $y(x) = a\cdot 1 + b\cdot x + \underbrace{c\cdot x^2}_{\infty} + \underbrace{d\cdot\cos(2x) + f\cdot\sin(2x)}_{\text{omez}}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\to x \sim \infty: \ y(x) \sim c\cdot x^2$$

$$\underbrace{d\cdot\cos(\omega x) + f\cdot\sin(\omega x)} =$$

$$= A\cos(\omega x + \varphi)$$

$$= A\sin(\omega x + \psi)$$

$$A = \sqrt{d^2+f^2}$$

$$\varphi$$

$$\psi$$

→ $y'' - 4y' + 13y = 0$

→ obecné řeš.
→ asympt. chování v ∞ typického řeš.

→ $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

~~$(\lambda \quad 1)\cdot(\lambda \quad 13)$~~ → $\dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = 2 \pm \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{-36}}_{6} = 2 \pm 3i$

$2 \to e^{2x}$

$3i \to \cos, \sin(3x)$

→ $e^{(2+3i)x} = e^{2x} \cdot e^{3ix} = e^{2x} \cdot (\cos(3x) + i\sin(3x))$

$e^{(2-3i)x}$

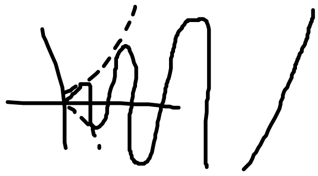
$= \underbrace{e^{2x}\cos(3x)}_{Re} + i\,\underbrace{e^{2x}\sin(3x)}_{Im}$

$\underbrace{\text{obecné řeš: } y(x) = a \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x) + b \cdot e^{2x}\sin(3x),\ x \in \mathbb{R}}$

$a \in \mathbb{R}$, $e^{2x} \to \infty$, $\sim$, $b \in \mathbb{R}$

→ pro $x \to \infty$: $\underbrace{\text{neumím určit}}$

$\overbrace{y(x) = Ae^{2x}\cos(3x+\varphi)}$



$\boxed{y'' - y' - 6y = 0}$, $\boxed{y(0) = -4, \quad y'(0) = 13}$

$\longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \longrightarrow \lambda = -2, 3$

$(\lambda+2)(\lambda-3) = 0$

$\boxed{\text{obecné řeš}: \; y(x) = a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{3x}, \; x \in \mathbb{R}}$

$\longrightarrow \quad y' = -2a e^{-2x} + 3b e^{3x}$

chci: $\left[\begin{array}{l} a \cdot e^{-2\cdot 0} + b e^{3\cdot 0} = -4 \\ -2a \cdot e^{-2\cdot 0} + 3b e^{3\cdot 0} = 13 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = -4 \\ -2a + 3b = 13 \end{array}\right]$

$\longrightarrow 5b = 5 \longrightarrow \underline{b = 1} \quad a + 1 = -4, \quad \underline{a = -5}$ ✓

řešení: $\boxed{y(x) = -5e^{-2x} + e^{3x}, \; x \in \mathbb{R}}$

$$y(x) = a\cdot e^{-2x} + b\cdot e^{3x},\ x\in\mathbb{R}$$

a) Najdi nějaké poč. podmínky v $x_0 = 0$, které vytvoří řešení splňující $y(1) = e^3$, $y'(1) = 3e^3$.

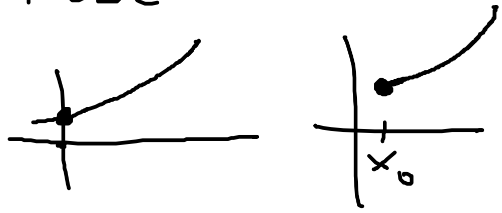
$\longrightarrow$ řešení?

$$\left.\begin{aligned} y(1) &= ae^{-2} + be^{3} \overset{?}{=} e^{3} \\ y'(1) &= -2ae^{-2} + 3be^{3} \overset{?}{=} 3e^{3} \end{aligned}\right] \qquad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

$2\times(\#1) + (\#2)$: $5be^3 = 5e^3 \Rightarrow b = 1.$

$$y(x) = e^{3x},\ x\in\mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 3 \end{aligned}}$



$y(x) = a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{3x}, x \in \mathbb{R}$

b) $\underbrace{\text{Najdi nějaké poč. podmínky v } x_0 = 0, \text{ aby odpovídající řešení bylo omezené}}$ na $\langle 0, \infty)$

$\rightarrow$ chci $b = 0$, $y(x) = e^{-2x}$ $\qquad y' = -2e^{-2x}$

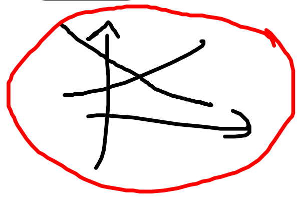
podmínky: $\begin{bmatrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{bmatrix}$ ← netriviální

$\langle\langle y(x) = 0 \rightarrow y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \rangle\rangle$ ← triv.

Je dána $y'' - 6y' + 9py = 0$, p… parametr $p \in \mathbb{R}$.

Pro které p budeme mít jistotu, že mezi řešeními nenajdeme zároveň kladné rost. a kladné kles.

$\lambda^2 - 6\lambda + 9p = 0$ $\quad e^{3x}$



ne

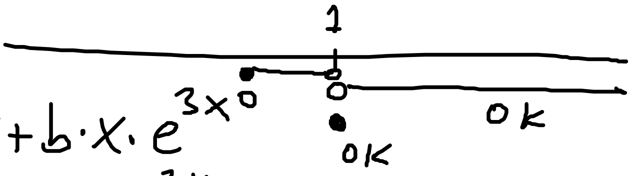
$\hookrightarrow \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36p}}{2} = \underline{3 \pm 3\sqrt{1-p}}$

$\to \underbrace{1-p < 0}$ $\to$ komplexní λ $\to$ řeš: $e^{3x}\cos(wx)$ / $\sin$

$1 < p$ $\quad$ nelze mít rost./kles. $\to$ o.k.

$\to \{e^{3x}\cos(wx),\ e^{3x}\sin(wx)\}$

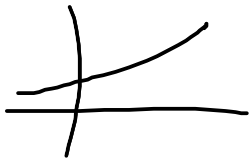
→ $p = 1$ $\boxed{\lambda = 3 \pm 3\sqrt{1-p}}$



$\lambda = 3$ (2×), $y(x) = a\cdot e^{3x} + b\cdot x\cdot e^{3x}$

$= (a+bx)\, e^{3x}$

↑ roste, $b>0$ ↑ roste



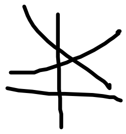
nevadí

kladná klesá

může nenastane $\Rightarrow b<0$, pak $y(x)<0$ pro x velká

→ $p<1 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 3\sqrt{1-p} \in \mathbb{R}$, různé   O.K.

nechci: $\lambda>0$, $\lambda<0$



chci: stejné znam.

$3+3\sqrt{1-p} > 0 \Rightarrow$ chci $3-3\sqrt{1-p} \geq 0$

$\Leftrightarrow 3 \geq 3\sqrt{1-p} \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{1-p} \Leftrightarrow 1 \geq 1-p \Leftrightarrow p \geq 0$

Odpověď: vyhovuje $p \geq 0$.

lin. rovnice $< \quad y''' + c_2 y'' + c_1 y' + c_0 y = 0$

$\hookrightarrow \lambda \quad c_i$

spec. příp.

lin. rovnice $< \quad y' + \underbrace{a(x)} y = 0 \quad \rightarrow$ separace

$a(x) = c_0$

obecné řešení: $y' - 2y = \frac{1}{x} e^{2x}$ ← $x \neq 0$

Bonus: Najdi řešení splňující $y(-1) = 0$.

→ hom: $y' - 2y = 0$ $\quad \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 2$

$$y_h(x) = a \cdot e^{2x}$$

→ var: $y_p(x) = a(x) \cdot e^{2x}$ → dosadím

$$a'(x)\cancel{e^{2x}} + \cancel{a(x) 2 \cdot e^{2x}} - \cancel{2a(x)e^{2x}} = \frac{1}{x}\cancel{e^{2x}} \qquad a'(x) = \frac{1}{x}$$

$a(x) = \ln|x|$ → $y_p(x) = \ln|x| \cdot e^{2x}$

obecné řeš: $\boxed{y(x) = \ln|x| \cdot e^{2x} + a e^{2x}, \; x \neq 0}$

chci $0 \cdot e^{-2} + a e^{-2} = 0 \Rightarrow a = 0$ $\quad \boxed{y(x) = \ln|x| e^{2x}, x \in (-\infty, 0)}$

$y(x) = a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{3x}, x \in \mathbb{R}$

c) Test ... pozná řešení omez. na $(0, \infty)$.
z poč. podm.

$\rightarrow$ chci $y(x) = a e^{-2x}$ $(b = 0)$

$$\begin{bmatrix} y(0) = a \\ y'(0) = -2a \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y'(0) = -2 \cdot y(0)}$$

$y(0) = A$

$y'(0) = B$

$B = -2A \rightarrow$ ok $\Downarrow$ omez.

$\hookrightarrow$ ne $\Rightarrow y \nearrow$