$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ kořen? $(r = 0)$

$\longrightarrow$ na $\langle -5, 3 \rangle$ aplikuj bisekci, 2 iterace

$\hookrightarrow$ kořen v $\langle a_0, b_0 \rangle = \langle -5, 3 \rangle$ / Fakt? $f(-5) < 0$, $f(3) > 0$ /

střed $m_0 = \frac{1}{2}(-5+3) = -1$ $f(-1) = \frac{-1}{2} < 0$

opač. znam. vs. $f(3)$

$\Rightarrow$ kořen v $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle -1, 3 \rangle$

$\hookrightarrow$ střed $m_1 = 1$ $f(1) = \frac{1}{2} > 0$ opač. znam. vs. $f(-1)$ ✓

$\Rightarrow$ kořen v $\langle a_2, b_2 \rangle = \langle -1, 1 \rangle$.

odhad: $m_2 = 0$ ✓

→ aplikuj Newtonovu ~~met.~~ s $x_0 = 1/2$, udělej 2 iterace /3 aproximace

→ $\underline{\underline{x_0}} = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}$$

→ $$\underline{\underline{x_1}} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\cancel{\frac{1}{4}+1}}}{\frac{1-\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4}+1)^{\cancel{2}}}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{4}+1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{5}{3} = \frac{-2}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

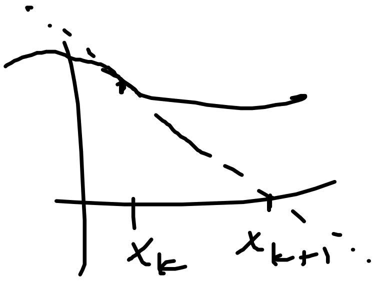
$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{x_k}{\cancel{(x_k^2+1)}}}{\frac{1-x_k^2}{(x_k^2+1)^{\cancel{2}}}} = x_k - \frac{x_k(x_k^2+1)}{1-x_k^2} = \frac{x_k - x_k^3 - x_k^3 - x_k}{1-x_k^2} = \circledast$$

$$(*) \Rightarrow \quad \boxed{x_{k+1} = \frac{-2x_k^3}{1-x_k^2}}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\underline{\underline{x_2}} = \frac{-2 \cdot \frac{-1}{27}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}.}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



Rád?

$b : p = 1$

$N : p = 2$

$$|E_{k+1}| \le C \cdot |E_k|^p$$

$$E_k = r - x_k$$

$x_k \to E_k$?

$x_{k+1} \to E_{k+1}$

$C \to E_{k+2}$

$$|E_h| \le c \cdot h^p$$

I

II

$0 \to h$

$E \to h$?

$\tilde{h} \to \tilde{E}$

$X_2 = \frac{1}{12}$

zákazník: chyba $< \varepsilon = 0.25$

$\varepsilon = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$f(x_2) = \frac{12}{145} > 0$

$f(x_2 + \varepsilon) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{10} > 0$

nevím jestli je kořen mezi x_2 a $x_2 + \varepsilon$

$f(x_2 - \varepsilon) = f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{6}{37} < 0$

$\Rightarrow$ je kořen mezi $x_2 - \varepsilon$ a x_2

$\langle \quad \rangle$

$\Rightarrow$ x_2 je dostatečně přesné!

Dána $x-3=\frac{1}{x^2}$ Řešení?

→ Přepiš na úlohu hledání kořene.

→ Aplikuj metodu bisekce na $\langle 1,5\rangle$, předveď dvě iterace.

→ Aplikuj Newtonovu metodu s poč. odhadem, $x_0=1$, předveď dvě iterace (specializovaný vzorec $x_{k+1}=\dots$)

→ $\hat{r}=3$, je to dobrý odhad kořene, pokud je zadána tolerance $\varepsilon=0.5=\frac{1}{2}$?

přepis $x-3-\frac{1}{x^2}=0 \rightsquigarrow f(x)=x-3-\frac{1}{x^2}$ | $x^3-3x^2-1=0$ $g(x)=x^3-3x^2-1$

$f(x) = x - 3 - \frac{1}{x^2}$

$\longrightarrow$ koreň v $\langle a_0, b_0 \rangle = \langle 1, 5 \rangle$ $\begin{cases} f(1) = -3 & - \\ f(5) = 2 - \frac{1}{25} & + \end{cases}$

$\Longrightarrow m_1 = 3, \quad f(3) = -\frac{1}{9} \quad -$ opačné vs. $f(5)$

$\Rightarrow$ koreň v $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$

$\Longrightarrow m_2 = 4, \quad f(4) = 1 - \frac{1}{16} \quad +$ opač. vs. $f(3)$

$\Rightarrow$ koreň v $\langle a_2, b_2 \rangle = \langle 3, 4 \rangle$. ✓

$\Rightarrow a_2 = 3, \; b_2 = 4$ ✓

$\Longrightarrow$ odhad koreňa $\hat{r} = 3.5$ ✓

$f(x) = x - 3 - \frac{1}{x^2}$ $\quad f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - 3 - \frac{1}{x_k^2}}{1 + \frac{2}{x_k^3}} = x_k - \frac{x_k^4 - 3x_k^3 - x_k}{x_k^3 + 2} =$$

$$= \frac{x_k^4 + 2x_k - x_k^4 + 3x_k^3 + x_k}{x_k^3 + 2} = \frac{3x_k^3 + 3x_k}{x_k^3 + 2}$$

$$\boxed{x_{k+1} = 3\,\frac{x_k^3 + x_k}{x_k^3 + 2}}$$

$x_0 = 1$

$x_1 = 3\,\frac{1+1}{1+2} = 2$

$x_2 = 3\,\frac{8+2}{8+2} = 3$

$x_3 = \frac{\cancel{41}}{29}$

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \qquad g'(x) = 3x^2 - 6x$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1 - \dfrac{-3}{-3} = 0$

$x_2 = 0 - \dfrac{-1}{0}$

↳ zkusíme jiné! $x_0 = 1.01$

$f(x) = x - 3 - \frac{1}{x^2}$ $\quad \hat{r} = 3 \quad \varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = -\frac{1}{9} \quad - \\ f\left(3+\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{49} \quad + \end{array}\right\}$$

kořen mezi $\hat{r}$ a $\hat{r} + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\hat{r} = 3$ je dobrý (dostatečně přesný)

$\delta \approx \frac{1}{12}$

$f\left(3-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{25} \quad -$

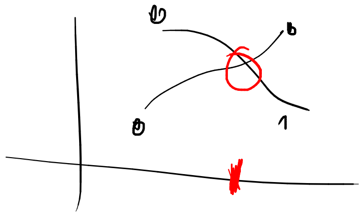
$\hat{r} = 3$

$\hat{r} + \xi = 3 + \frac{1}{2}$

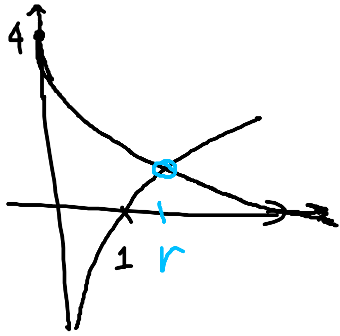
$$x - 3 = \frac{1}{x^2}$$

$$0 < \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{4}{49} \sim \frac{1}{12}$$



→ řešení rovnice $\ln(x) = 4 - \sqrt{x}$.



↳ kořen $\underbrace{\ln(x) + \sqrt{x} - 4}_{f(x)} = 0$

→ Newton

→ bisekce $\langle 1, 13 \rangle$, $\varepsilon = 0.0001$

zastavovací podmínky

- abs. rozdíl $|x_{k+1} - x_k| \overset{?}{<} \varepsilon$
- rel. rozdíl $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} \overset{?}{<} \varepsilon$
- hodnota $|f(x_{k+1})| \overset{?}{<} \varepsilon$ ← zlobí f plochá

x_k velké relativní dřív (?) ne později (!)

$x_k \sim 0$ rel. rozdíl později (?) ne dřív (!)