Fourierovy řady, integrální transformace a Z-transformace

Martin Bohata, Jan Hamhalter

7. ledna 2021

Obsah

Kapitola 1

Fourierovy řady

1.1 Komplexní Fourierovy řady

Fourierovy řady řeší, zhruba řečeno, úlohy matematické fyziky a teorie signálů na omezené časové či prostorové oblasti. Jejich techniku jako jeden z prvních použil J. Fouriere, který pomocí Fourierovy řady vyřešil rovnici tepla a nalezl stacionární rozložení teploty na konečné tyči. Tradiční aplikací Fourierových řad je rozklad časově omezeného (respektive periodického) signálu do superpozice násobných harmonických kmitů. Naproti tomu Fourierova transformace, kterou se budeme zabývat zanedlouho, řeší úlohu vedení tepla na nekonečné tyči a umožňuje spektrální analýzu nekonečného (neperiodického) signálu. Fourierova transformace funkcí s konečným nosičem (tj. funkcí, které mají nenulové hodnoty jen v nějakém uzavřeném intervalu) se dá získat limitním přechodem v koeficientech Fourierových řad, jejichž perioda jde k nekonečnu. Teorie Fourierových řad je proto logický předstupeň k Fourierově transformaci, který umožní její hlubší pochopení. Z tohoto důvodu začínáme náš výklad základním shrnutím teorie Fourierových řad s akcentem na jejich komplexní tvar.

Definice 1.1.1. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a funkce f splňuje následující předpoklady:

(i) $f : [a, a+T] \to \mathbb{C}$, nebo f je periodická funkce s periodou T.

(ii) f je absolutně integrovatelná na intervalu $[a, a+T]$, tj.

$$\int_a^{a+T} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty.$$

Fourierova řada v komplexním tvaru funkce f je řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \cdots + c_{-2}e^{-2i\omega t} + c_{-1}e^{-i\omega t} + c_0 + c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{2i\omega t} + \cdots$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

a

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Komplexní čísla c_n, $n \in \mathbb{Z}$, se nazývají *Fourierovy koeficenty* funkce f.

Fourierovy koeficienty funkce f „poměřují“ funkci f s harmonickými kruhovými pohyby v komplexní rovině $t \mapsto e^{in\omega t}$ o (úhlových) frekvencích $n\omega$. Kladné n odpovídá pohybu proti směru hodinových ručiček, zatímco záporné n odpovídá pohybu ve směru hodinových ručiček.

Fourierovy koeficienty jednoznačně kódují spojité funkce, ve smyslu následujícího principu.

Věta 1.1.2. *Spojité funkce s periodou $T > 0$ se stejnými Fourierovými koeficienty jsou stejné. Jinými slovy, jsou-li funkce f a g spojité na intervalu $[a, a+T]$ a platí-li*

$$\int_a^{a+T} f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} g(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, pak $f(t) = g(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz tohoto faktu je obtížnější a nebudeme ho uvádět.

Pokud má analyzovaná funkce jen reálné hodnoty, jeví její Fourierovy koeficienty důležitou symetrii.

Tvrzení 1.1.3. *Je-li f reálná integrovatelná funkce na intervalu $[a, a+T]$, pak pro její Fourierovy koeficienty platí:*

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Platí, že

$$\begin{aligned} Tc_n &= \int_a^{a+T} f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t - i\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t, \\ Tc_{-n} &= \int_a^{a+T} f(t)e^{in\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t + i\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Protože f je reálná funkce, jsou integrály $\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$ a $\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$ reálné. Z toho vyplývá, že $c_{-n} = \overline{c_n}$. □

Uvedená symetrie Fourierových koeficientů pro reálné funkce umožňuje i převedení Fourierovy řady do kosinově-sinového tvaru, který obsahuje pouze reálné parametry. Je-li totiž $f(t)$ reálná funkce, pak dle předchozího tvrzení jsou funkce $c_n e^{in\omega t}$ a $c_{-n}e^{-in\omega t}$ komplexně sdružené a jejich součet tak dá reálnou funkci. Je-li $n \geq 0$, pak platí

$$\begin{aligned} c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t} &= c_n(\cos n\omega t + i\sin n\omega t) + c_{-n}(\cos n\omega t - i\sin n\omega t) \\ &= (c_n + c_{-n})\cos n\omega t + (ic_n - ic_{-n})\sin n\omega t \\ &= 2\,(\mathrm{Re}\,c_n)\cos n\omega t - 2\,(\mathrm{Im}\,c_n)\sin n\omega t. \end{aligned}$$

Označme

$$\begin{aligned} a_n &= 2\mathrm{Re}\,c_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t \qquad \text{pro } n \geq 0, \\ b_n &= -2\mathrm{Im}\,c_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t \qquad \text{pro } n \geq 1. \end{aligned}$$

Toto značení nám umožní přepis komplexního tvaru Fourierovy řady do tzv. *reálného tvaru* (někdy také nazývaného *kosinově-sinový tvar*):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$$

Fourierova řada v tomto tvaru reprezentuje nekonečnou superpozici násobných harmonických kmitů

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

s frekvencemi $n\omega$ a amplitudou

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,.$$

Mezi komplexním a kosinově-sinovým tvarem máme následující transformační vztahy pro koeficienty. Je-li $n \geq 1$, pak

$$a_n = 2\operatorname{Re} c_n \qquad b_n = -2\operatorname{Im} c_n$$

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$$

1.2 Konvergence Fourierových řad

Z matematického pohledu jsou Fourierovy koeficienty vlastně souřadnicemi vůči nekonečné bázi složené z trigonometrických funkcí. V teorii signálů určují energii, s jakou jsou ve spektrálním rozkladu dané periodické funkce zastoupeny jednotlivé násobné frekvence. Čím větší je hodnota $|c_n|$, tím větší roli hraje frekvence $n\omega$ v daném signálu. Je-li $c_n = 0$ není frekvence $n\omega$ v signálu přítomna. V důležitých případech (ale ne vždy) je periodická funkce přímo rovna součtu své Fourierovy řady. V této situaci můžeme funkci aproximovat částečnými součty, které jsou trigonometrickými polynomy. Uvedeme si důležitou Dirichletovu větu, jejíž důkaz pro složitost neuvádíme.

Věta 1.2.1 (Dirichletova věta)**.** *Je-li reálná funkce f s periodou T po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci, pak*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t,$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$, kde a_n a b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$.

1.3 Souvislost s Laurentovými řadami

Fourierova řada je formálně podobná řadě Laurentově se středem v počátku. Skutečně, nechť Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

konverguje ve vlastním prstencovém okolí nuly, které obsahuje jednotkovou kružnici. Dosadíme-li do této řady $z = e^{it}$, získáme Fourierovu řadu 2π-periodické funkce ve tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Toho se dá někdy z výhodou využít pro počítaní Fourierových koeficientů technikou Laurentových rozvojů. Tímto postupem se vyhneme složitému integrování. Pro ilustraci si uveďme jeden příklad.

Příklad 1.3.1. Pomocí Laurentovy řady se pokusíme nalézt Fourierovu řadu funkce

$$f(t) = \frac{1}{2 + \cos t}.$$

Podle Dirichletovy věty je zadaná funkce součtem své Fourierovy řady. Pro $z = e^{it}$, kde $t \in \mathbb{R}$, platí

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Uvažujme pomocnou funkci

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2 + \frac{z^2+1}{2z}} = \frac{2z}{z^2 + 4z + 1}.$$

Víme, že pro tuto funkci platí

$$\widetilde{f}(e^{it}) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Funkce $\widetilde{f}$ je racionální funkce a její jmenovatel má nulové body $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ a $z_2 = -2 - \sqrt{3}$. Budeme hledat Laurentův rozvoj funkce $\widetilde{f}$ v mezikruží obsahující jednotkovou kružnici. Tedy v oblasti dané nerovnicemi

$$|z_1| = 2 - \sqrt{3} < |z| < |z_2| = 2 + \sqrt{3}.$$

Rozklad na částečné zlomky má tvar

$$\widetilde{f}(z) = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2},$$

kde $A = \frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ a $B = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Laurentovy rozvoje parciálních zlomků jsou

$$\frac{A}{z - z_1} = \frac{A}{z}\frac{1}{1 - \frac{z_1}{z}} = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{z^{n+1}}, \quad \text{pro } |z| > |z_1|,$$

$$\frac{B}{z - z_2} = B\frac{1}{z_2}\frac{1}{\frac{z}{z_2} - 1} = -B\frac{1}{z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^n} = -B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^{n+1}}, \quad \text{pro } |z| < |z_2|.$$

Platí tedy

$$\widetilde{f}(z) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{z^{n+1}} - B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{pro } |z_1| < |z| < |z_2|,$$

kde

$$c_0 = -\frac{B}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

a pro $n \geq 1$ je

$$c_n = -\frac{B}{z_2^{n+1}} = -\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{1}{(-2-\sqrt{3})^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(-2-\sqrt{3})^n},$$

$$c_{-n} = A z_1^{n-1} = \frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} (-2+\sqrt{3})^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-2+\sqrt{3})^n.$$

V tomto konkrétním případě jsou c_n reálné a $c_n = c_{-n}$.

Vrátíme se nyní k funkci $f(t)$.

$$f(t) = \widetilde{f}(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{int} + e^{-int}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \cos nt.$$

Po dosazení numerických hodnot a úpravě dostáváme:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} (-2+\sqrt{3})^n \cos nt.$$

■

Kapitola 2

Fourierova transformace

2.1 Definice a příklady

Jednou z motivací Fourierovy transformace je spektrální rozklad obecné neperiodické funkce v nekonečné časové oblasti. Na rozdíl od periodické funkce, kdy stačí k popisu signálu znát korelace s posloupností harmonických pohybů s násobnými frekvencemi, je v obecné situaci zapotřebí znát korelaci s každou možnou frekvencí. Tuto znalost zprostředkuje Fourieorova ransformace, která počítá korelace dané funkce s harmonickými funkcemi $g(t) = e^{i\omega t}$, kde ω probíhá všechna reálná čísla.

V celé kapitole budeme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ z komplexně hodnotové funkce $g(t)$ chápat ve smyslu hlavní hodnoty, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definice 2.1.1. Nechť $f(t)$ je komplexní funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Funkce

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

se nazývá *Fourierova transformace funkce* $f(t)$ (nebo také přímá Fourierova transformace funkce $f(t)$). Funkce

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

se nazývá *inverzní Fourierova transformace funkce* $f(t)$ (nebo také zpětná Fourierova transformace funkce $f(t)$). Za definiční obor definovaných transformací se považuje množina všech $\omega \in \mathbb{R}$, pro které existují příslušné integrály ve smyslu hlavní hodnoty.

Mezi přímou a zpětnou Fourierovou transformací funkce f existuje jednoduchý převodní vztah:

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi\check{f}(-\omega).$$

Zobrazení $\mathscr{F} : f \mapsto \hat{f}$, které dané funkci přiřadí její Fourierův obraz, se nazývá Fourierova transformace. Analogicky, zobrazení $\mathscr{F}^{-1}$, které dané funkci přiřadí její inverzní Fourierovu transformaci $\mathscr{F}^{-1} : f \mapsto \check{f}$ se nazývá inverzní (zpětná) Fourierova transformace. V jistém smyslu se skutečně jedná o vzájemně inverzní zobrazení, ale to si ukážeme až později. Skutečnost, že funkce $F(\omega)$ je Fourierovým obrazem funkce $f(t)$, budeme při výpočtech vyjadřovat zápisem

$$f(t) \doteq F(\omega) \text{ nebo } \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega) = F(\omega).$$

Analogicky $\mathscr{F}^{-1}\left[f(t)\right](\omega) = F(\omega)$ vyjadřuje fakt, že $F(\omega)$ je inverzní Fourierova transformace funkce $f(t)$.

V případě, kdy je funkce $f(t)$ (absolutně) integrovatelná, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$, je její Fourierova transformace definována na celé reálné ose. Pak totiž pro každé $\omega \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-i\omega t}|\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty,$$

a tudíž integrál definující hodnotu Fourierovy transformace v bodě ω existuje. Označme symbolem $L^1(\mathbb{R})$ množinu všech integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}$. Jak jsme si právě uvedli, každá funkce z $L^1(\mathbb{R})$ má Fourierův obraz definovaný na celé reálné ose. Neplatí ovšem, že by tento obraz byl opět funkce z $L^1(\mathbb{R})$, jak uvidíme na konkrétních příkladech.

Příklad 2.1.2 (Obraz bránové funkce)**.** Nechť $a > 0$ a položme

$$f_a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-a, a], \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Jinými slovy $f_a(t)$ je charakteristickou funkcí intervalu $[-a, a]$. Pro $\omega \neq 0$ je

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-a}^{t=a} \\ &= \frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{i\omega} = 2\frac{\sin a\omega}{\omega}. \end{aligned}$$

Pro $\omega = 0$ snadnou integrací obdržíme $\hat{f}_a(0) = 2a$.

Vidíme tedy, že obrazem bránové funkce je lineárně tlumená sinusovka. Další příklad dokumentuje, že známe-li přímou Fourierovu transformaci, můžeme okamžitě stanovit inverzní Fourierovu transformaci.

$$\check{f}_a(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}_a(-\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(-a\omega)}{-\omega} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin a\omega}{\omega}, & \omega \neq 0, \\ \frac{a}{\pi}, & \omega = 0. \end{cases}$$

■

Stěžejní vlastností Fourierovy transformace je skutečnost, že převádí gaussovské funkce na gaussovské funkce.

Příklad 2.1.3 (Obraz gaussovské funkce)**.** Uvažujme sudou gaussovskou funkci

$$f(t) = e^{-at^2},$$

kde $a > 0$. Lze ukázat např. aplikací Cauchyovy věty, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-it\omega} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Na základě toho (substituce $u = \sqrt{a}t$) máme

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-it\omega} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-iu\frac{\omega}{\sqrt{a}}} \,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

■

Další příklad ukazuje Fourierův obraz jednostranného fyzikálního děje, který začne v čase nula. Například se může jednat o vybíjení kondenzátoru. I když je daná funkce ryze reálná, má její Fourierova transformace komplexní hodnoty. Později se dovíme, že toto není náhoda.

Příklad 2.1.4. Ať $\alpha > 0$ a

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom

$$\hat{f}(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{\alpha + i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

■

V další části se budeme zabývat Fourierovými obrazy racionálních funkcí. Jejich výpočet bude aplikací Reziduové věty. Předpokládejme, že P a Q jsou polynomy, $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$ a Q nemá reálné kořeny. Z komplexní analýzy víme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{it} \,\mathrm{d}t = 2\pi i \sum_{w \in \{z \,|\, Q(z)=0,\, \operatorname{Im} z > 0\}} \operatorname{res}_w \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \, e^{iz} \right).$$

Pro výpočet Fourierovy transformace racionální funkce $\frac{P(t)}{Q(t)}$ ovšem potřebujeme obecnější integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t.$$

(Pro $\omega = -1$ je druhý integrál roven prvnímu, na který je přímo aplikovatelná Reziduová věta.) Obecnější integrál se dá naštěstí převést lineární substitucí na integrál speciální. Pro $\omega \neq 0$ položíme $u = -\omega t$. Pomocí věty o substituci v integrálu máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(-\frac{u}{\omega})}{Q(-\frac{u}{\omega})} e^{iu} \frac{1}{|\omega|} \,\mathrm{d}u.$$

Označíme-li

$$R(z) = \frac{P\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{Q\left(-\frac{z}{\omega}\right)},$$

máme
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi i}{|\omega|} \sum_{w \in \left\{ z \,\middle|\, Q(-\frac{z}{\omega})=0,\, \operatorname{Im} z>0 \right\}} \operatorname{res}_w R(z) e^{iz}.$$

Vidíme, že výpočet Fourierovy transformace racionální funkce se redukuje na výpočet konečně mnoha reziduí v singularitách racionální funkce ležících nad reálnou osou. Podívejme se na konkrétní případ.

Příklad 2.1.5. Uvažujme funkci
$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}.$$

Pro $\omega \neq 0$ je
$$R(z) = \frac{1}{\frac{z^2}{(-\omega)^2}+1} = \frac{\omega^2}{z^2+\omega^2},$$

a proto
$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi i}{abs\omega} \operatorname{res}_{i|\omega|} \frac{\omega^2}{z^2+\omega^2} e^{iz} = \frac{2\pi i\omega^2}{|\omega|} \frac{e^{-|\omega|}}{2i\,|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}.$$

Je-li $\omega = 0$ můžeme dopočíst hodnotu Fourierova obrazu přímo z definice. Dostáváme tak
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

■

2.2 Souvislost Fourierovy transformace a Fourierovy řady

Vysvětlíme si nyní důležitou souvislost mezi Fourierovou řadou a Fourierovou transformací. Předpokládejme, že $f(t)$ je periodická funkce s periodou $T > 0$ taková, že
$$\int_a^{a+T} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Označme $\mathbf{1}_{[a,a+T]}$ charakteristickou funkci intervalu $[a, a+T]$ a položme
$$f_T(t) = \mathbf{1}_{[a,a+T]}(t) f(t).$$

Funkce $f_T(t)$ je vlastně ořezání periodické funkce $f(t)$ na základní interval délky periody. Jinými slovy
$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, a+T], \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Pro Fourierův koeficient c_n funkce $f(t)$ platí
$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f_T(t) e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \hat{f}_T(n\omega).$$

Pro stanovení všech Fourierových koeficientů c_n tedy stačí znát Fourierovu transformaci funkce f_T a spočítat (vzorkovat) tuto funkci v bodech $n\omega = n\frac{2\pi}{T}$. Všimněme si, že pokud bude perioda T růst do nekonečna, bude krok vzorkovaní $\frac{2\pi}{T}$ konvergovat k nule. Fourierovy koeficienty tak „hustě vyplní" graf funkce $\hat{f}_T$.

Příklad 2.2.1. Mějme dva paramentry $T > 0$ a $T_1 < T/2$. Definujme pomocí nich obdélníkovou vlnu s periodou T a délkou obdelníkových impulzů $2T_1$:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [nT - T_1, nT + T_1],\ n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Volbou $a = -\frac{T}{2}$ dostaneme v souladu s předchozím značením, že

$$f_T(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T_1, T_1],\ n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

je bránová funkce s paramentrem T_1. Její Fourierův obraz je funkce

$$\hat{f}_T(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(T_1\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0, \\ 2T_1, & \omega = 0. \end{cases}$$

Tento Fourierův obraz nezávisí na periodě T. Pro Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$ pak máme

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{T}\frac{2\sin\left(n\frac{2\pi}{T}T_1\right)}{n\frac{2\pi}{T}} = \frac{\sin\left(n\frac{2\pi}{T}T_1\right)}{n\pi}, & n \neq 0, \\ \frac{1}{T}g(0) = \frac{2T_1}{T}, & n = 0. \end{cases}$$

■

2.3 Věta o inverzní Fourierově transformaci

Představme si, že máme funkci $f(t)$ v časové oblasti, kterou neznáme explicitně. Známe nicméně Fourierův obraz $g(\omega) = \hat{f}(\omega)$ definovaný na celé reálne ose a rádi bychom z něj časový signál $f(t)$ zrekonstruovali. V případě Fourierovy řady můžeme za příznivých okolností získat původní signál z posloupnosti Fourierových koeficientů $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ jako součet řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$. Terminologie Fourierovy transformace nabádá zkusit aplikovat na $g(\omega)$ inverzní Fourierovu transformaci a získat tak funkci

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Obecně neplatí, že by funkce f a $\tilde{f}$ splývaly. Je-li například funkce $f(t)$ rovna 1 v nule a ve všech ostatních bodech je nulová, je její Fourierův obraz nulový, a tedy $\tilde{f}$ je nulová ve všech bodech. Nicméně, je netriviální skutečností, že za jistých okolností jsou funkce f a $\tilde{f}$ totožné. To je obsahem vět o inverzní Fourierově transformaci, které patří mezi hlubší principy matematické fyziky. Než přikročíme k formulaci jedné takové věty, dokážeme si následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.3.1. *Předpokládejme, že funkce $h(x)$ má omezenou derivaci na intervalu $[c, d]$. Pak*

$$\lim_{a\to\infty} \int_c^d h(x) \sin(ax)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Využitím metody per partes obdržíme

$$\int_c^d h(x) \sin(ax)\, \mathrm{d}x = \left[h(x) \frac{-\cos(ax)}{a} \right]_c^d + \frac{1}{a} \int_c^d \cos(ax) h'(x)\, \mathrm{d}x \to 0 \text{ pro } a \to \infty.$$

$\square$

V následující větě si uvedeme způsob rekonstrukce signálu z jeho frekvenčního vyjádření pro (absolutně) integrovatelné po částech diferencovatelné funkce.

Věta 2.3.2 (Věta o inverzní Fourierově transformaci)**.** *Nechť f je integrovatelná funkce na $\mathbb{R}$.*

(i) *Je-li $f(t)$ spojitá na $\mathbb{R}$ a $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ pak*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

(ii) *Je-li $f(t)$ a $f'(t)$ po částech spojitá funkce na $\mathbb{R}$, pak*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \tag{2.1}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Provedeme pouze důkaz tvrzení (ii), a to za omezujícího předpokladu, že $f(t)$ má spojitou derivaci. Označme si jako $g(t)$ výraz na pravé straně dokazované rovnosti. Tedy

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega.$$

Rozepsáním vnitřního integrálu máme

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x \right) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x \right) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $|f(x)e^{-i\omega x}e^{i\omega t}| = |f(x)|$ a funkce $f(x)$ je integrovatelná, je

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) e^{-i\omega x} e^{i\omega t} \right| \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\omega < \infty$$

pro každé $a > 0$. Podle Fubiniho věty (v kombinaci s Tonelliho větou) pak můžeme přeorganizovat integraci v definici funkce $g(t)$, čímž obdržíme

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-a}^{a} e^{-i\omega(x-t)}\, \mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}x.$$

Po dalších úpravách máme

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{e^{-i\omega(x-t)}}{-i(x-t)} \right]_{\omega=-a}^{\omega=a} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{ia(x-t)} - e^{-ia(x-t)}}{i(x-t)} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Zavedeme-li novou integrační proměnnou $u = x - t$, získáme vyjádření funkce $g(t)$ ve tvaru

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+t) \frac{\sin au}{u} \mathrm{d}u.$$

Rozdělíme si nyní integrál na pravé straně identity na integrační obory $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ a v prvním provedeme substituci $s = -u$. Po formálním přeznačení integrační proměnné s za u obdržíme

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{a\to\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t-u) \frac{\sin(au)}{u} \mathrm{d}u + \int_0^{\infty} f(t+u) \frac{\sin(au)}{u} \mathrm{d}u \right).$$

Vzpomeňme si nyní na Newtonův integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Z něho se dá substitucí odvodit, že pro každé $a > 0$ máme

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(au)}{u} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

Newtonův integrál nám umožní psát

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \frac{\sin(au)}{u} \mathrm{d}u.$$

Budeme nyní zkoumat rozdíl funkcí $f(t) - g(t)$ ve snaze ukázat jeho nulovost. Na základě předchozích vztahů máme

$$f(t) - g(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{a\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{2f(t) - f(t+u) - f(t-u)}{u} \sin(au) \mathrm{d}u.$$

Integrál na pravé straně předchozí identity si rozdělíme na tři části o nichž ukážeme, že jsou malé pro velké a. Volme $\varepsilon > 0$. Díky diferencovatelnosti funkce $f(t)$ máme

$$\lim_{u\to 0+} \frac{2f(t) - f(t+u) - f(t-u)}{u} = f'(t) - f'(t) = 0.$$

Proto je funkce

$$\omega(u) = \frac{2f(t) - f(t+u) - f(t-u)}{u} \sin au$$

omezená na jistém pravém okolí nuly. Můžeme tedy najít $\delta > 0$ tak malé, že

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{2f(t) - f(t+u) - f(t-u)}{u} \sin(au) \mathrm{d}u \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.2}$$

Vzhledem k (relativní) konvergenci integrálů můžeme dále nalézt $K > 0$ tak velké, že

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_K^\infty \frac{2f(t) - f(t+u) - f(t-u)}{u} \sin(au)\,\mathrm{d}u \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.3}$$

Zbývá tedy odhadnout integrál

$$\int_\delta^K \frac{2f(t) - f(t+u) - f(t-u)}{u} \sin(au)\,\mathrm{d}u$$

a ukázat, že je malý pro a velké. To ale vyplývá z Lemmatu 2.3.1. Tedy existuje $L > 0$ takové, že pro $a > L$ je

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^K \frac{2f(t) - f(t+u) - f(t-u)}{u} \sin(au)\,\mathrm{d}u \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.4}$$

Spojením odhadů (2.2), (2.3), (2.4) a provedením limitního přechodu $a \to \infty$ máme

$$|f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo libovolné, musí platit, že $f(t) = g(t)$ pro všechna t. Tím je důkaz ukončen. □

Diskutujme nyní význam Věty o inverzní Fourierově transformaci. Předpokládejme, že platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Aproximujme integrál častečnými součty. Volme $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$. Pak aproximující součty jsou

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \hat{f}(\omega_k) e^{i\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k)$$

Jedná se vlastně o kombinaci harmonických funkcí $g_k(t) = \hat{f}(\omega_k) e^{i\omega_k t}$, kde $\left|\hat{f}(\omega_k)\right|$ udává amplitudu a ω_k frekvenci. Funkce $f(t)$ je tedy „skoro“ konečnou kombinací harmonických pohybů. Na rozdíl od Fourierových řad ovšem jednotlivé kmitočty nemusí být násobné. Hodnota Fourierovy transformace $\hat{f}(\omega)$ tak udává, s jakou silou se v daném signálu objevuje frekvence ω. Je-li například Fourierova transformace konstantní na intervalu $[a, b]$ a jinde nulová, jsou všechny frekvence ω soustředěny v tomto intervalu a to rovnoměrně. Nulovost Fourierovy transformace v nějakém bodě či intervalu znamená, že příslušné frekvence nejsou v signálu obsaženy.

Věta o inverzní Fourierově transformaci má jako důležitý důsledek skutečnost, že Fourierova transformace poskytuje úplnou informaci o dané funkci. Tímto teprve získává Fourierova transformace svůj význam jako ekvivalentní popis časového singnálu skrze jeho frekvenční spektrum.

Důsledek 2.3.3. *Dvě spojité funkce z $L^1(\mathbb{R})$ jsou stejné, mají-li stejnou Fourierovu transformaci.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ jsou spojité funkce a $\hat{f} = \hat{g}$. Pro $h = f - g$ máme $\hat{h} = 0$. Použitím bodu (i) z Věty o inverzní Fourierově transformaci dostaneme $h = 0$. □

Aplikace věty o inverzní Fourierově transformaci v konkrétních situacích vede k zajímavým a netriviálním integrálům, které dokumentují její sílu.

Příklad 2.3.4. Uvažujme funkci

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{\sin\omega}{\omega} e^{i\omega t} \,\mathrm{d}\omega.$$

Podle Příkladu 2.1.2 a Věty o inverzní Fourierově transformaci máme

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } t \in (-1, 1), \\ \frac{1}{2}, & \text{je-li } t \in \{-1, 1\}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jinými slovy inverzní Fourierova transformace funkce $h(\omega) = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$ je funkce $g(t)$. Speciální případ $t = 0$ vede na Newtonův integrál. ■

2.4 Vlastnosti Fourierovy transformace

Při výpočtech Fourierovy transformace používáme základní pravidla, zvaná gramatika Fourierovy transformace, která umožní z jednoduchých obrazů stanovit obrazy složitější.

Tvrzení 2.4.1 (Základní gramatika Fourierovy transformace)**.** *Předpokládejme, že funkce f má Fourierovu transformaci a $a \in \mathbb{R}$.*

(i) $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$.

(ii) *Pro $a \neq 0$ je* $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

(iii) $\mathscr{F}\left[\overline{f(-t)}\right](\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$.

(iv) $\mathscr{F}\left[e^{iat}f(t)\right](\omega) = \hat{f}(\omega - a)$.

Důkaz. Důkazy všech pravidel vyplývají z jednoduché substituce v daných integrálech.

(i)

$$\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t$$

Použijeme substituci $u = t - a$ a získáme tak

$$\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+a)} \,\mathrm{d}u = e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} \,\mathrm{d}u = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega).$$

(ii) Uvažujme $a \neq 0$. Pomocí substituce $u = at$ dostaneme

$$\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega\frac{u}{a}} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

(iii) Pomocí substituce $u = -t$ obdržíme

$$\mathscr{F}\left[\overline{f(-t)}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t)} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)} e^{i\omega u}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u) e^{-i\omega u}}\, \mathrm{d}u$$
$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u}\, \mathrm{d}u} = \overline{\hat{f}(\omega)}.$$

(iv)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega - a)t}\, \mathrm{d}t = \hat{f}(\omega - a).$$

□

Rozebereme si nyní význam výše uvedených pravidel. První pravidlo (nazývané posun ve vzoru) gramatiky Fourierovy transformace říká, že posun signálu v čase se ve frekvenční oblasti projeví modulací (násobením původního obrazu harmonickou funkcí $e^{-ia\omega}$). Poslední pravidlo (nazývané posun obrazu nebo také modulace vzoru) je symetrické a říká, že posun ve frekveční oblasti se projeví jako modulace v oblasti časové. Druhé pravidlo (tzv. změna měřítka) stanoví, jak se mění Fourierův obraz, provádíme-li změnu měřítka v časové oblasti. Projeví se změnou měřítka i v oblasti frekvenční avšak opačným způsobem. Jestliže například na časové ose zdvojnásobíme vzdálenosti projeví se to ve frekvenční oblasti naopak redukcí vzdálenosti na polovinu. Třetí pravidlo (pravidlo konjugace) se týká tzv. konjugované reflexe, což je transformace $f(t) \mapsto \overline{f(-t)}$. V případě reálně hodnotové funkce je konjugované reflexe složením dané funkce se středovou souměrností podle počátku $t \mapsto -t$, která odpovídá změně toku času. Ve Fourierově transformaci přechází konjugovaná reflexe na prostou konjugaci.

V následujícím příkladu odvodíme Fourierovu transformaci obecné gaussovské funkce. Každá taková gaussovská funkce totiž vzniká posunem sudé gaussovské funkce.

Příklad 2.4.2.

$$e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} \doteq e^{-i\omega} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

■

Pomocí pravidla o posunu obrazu můžeme spočítat i obraz součinu sinusovky s gaussovskou funkcí.

Příklad 2.4.3.

$$e^{-t^2} \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{-t^2} \doteq \frac{1}{2i} \sqrt{\pi} \left[e^{-\frac{(\omega-1)^2}{4}} - e^{-\frac{(\omega+1)^2}{4}} \right].$$

■

Další příklad ukazuje, jak je důležité uvažovat Fourierův obraz jako reálnou funkci s komplexními hodnotami. Typické reálné funkce totiž mají realný Fourierův obraz právě tehdy když jsou sudé, tedy jeví vlastnost symetrie. Každý signál, který je nenulový až od jistého okamžiku dál v čase, tedy má (vlastní) komplexní Fourierův obraz.

Příklad 2.4.4. Předpokládejme, že $f(t)$ je reálná, integrovatelná a po částech diferencovatelná funkce. Pokusíme se určit nutnou a postačující podmínku pro to, aby Fourierův obraz funkce $f(t)$ byl reálnou funkcí.

Funkce $f(t)$ má reálný obraz právě tehdy, když $\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$. Vzhledem k předpokladům platí věta o inverzní Fourierově transformaci. Použijeme-li inverzní Fourierovu transformaci na předchozí identitu dostaneme (použitím pravidla o konjugované reflexi), že $f(-t) = f(t)$. Tedy nutnou a postačující podmínkou je sudost funkce $f(t)$. ■

Pravidla gramatiky se často kombinují, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.4.5. Je dána funkce $g(t) = f(2t-3)$. Nyní nalezneme Fourierův obraz funkce g vyjádřený pomocí obrazu funkce $f(t)$.

Trasformaci argumentu $t \to f(2t-3)$ si rozložíme na menší kroky, což znázorníme následujícím diagramem.

$$\begin{array}{ccc} f(t) \to & f(t-3) \to & f(2t-3) \\ \hat{f}(\omega) \to & e^{-3i\omega}\hat{f}(\omega) \to & \dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}i\omega}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{2}\right) \end{array}$$

Tedy $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}i\omega}\hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. ■

Nyní si uvedeme větu, známou jako Riemannovo-Lebesgueovo lemma. Ta ukazuje pozoruhodný fakt, že integrovatelná funkce má spojitý obraz. Navíc platí, že tento obraz má nulovou limitu v nekonečnech.

Věta 2.4.6 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**.** *Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, pak $\hat{f}$ je spojitá funkce a*

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Důkaz. Ať $f(t)$ je integrovatelná funkce. Spojitost funkce $\hat{f}(\omega)$ vyplývá z teorie integrálu závislého na parametru. Dokážeme nyní nulovost příslušných limit. Nejdříve si ukážeme, že tvrzení platí pro charakteristické funkce intervalů, tedy pro obdélníkové impulzy. Je-li tedy funkce $f(t)$ charakteristickou funkcí intervalu $[a,b]$, máme

$$\hat{f}(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-ia\omega} - e^{-ib\omega}}{i\omega}$$

pro $\omega \neq 0$. Evidentně,

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Díky linearitě Fourierovy transformace platí totéž pro konečné lineární kombinace charakteristických funkcí konečných intervalů. Uvažujme nyní obecnou integrovatelnou funkci $f(t)$. Z teorie integrace plyne, že $f(t)$ můžeme aproximovat konečnou lineární kombinací charakteristických funkcí konečných intervalů. Jinými slovy existuje posloupnost funkcí $s_n(t)$, kde každá funkce $s_n(t)$ je konečnou lineární kombinací charakteristických funkcí konečných intervalů taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - s_n(t)|\,\mathrm{d}t = 0.$$

Jistě platí, že

$$\left|\hat{f}(\omega) - \hat{s}_n(\omega)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - s_n(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti tedy máme

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| \leq |\hat{s}_n(\omega)| + \left|\hat{f}(\omega) - \hat{s}_n(\omega)\right| \leq |\hat{s}_n(\omega)| + \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - s_n(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Volme nyní $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme n_0 tak velké, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - s_{n_0}(t)| \, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Následně nalezneme $\omega_0 > 0$ tak velké, že

$$|\hat{s}_{n_0}(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro všechna ω splňující $|\omega| \geq \omega_0$. Tímto dostáváme, že

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| < \varepsilon$$

pro všechna ω taková, že $|\omega| \geq \omega_0$. Docházíme takto k závěru, že

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right| = 0.$$

□

Věta 2.4.7 (Obraz derivace)**.** *Nechť $f(t)$ je spojitá integrovatelná funkce se spojitou a integrovatelnou derivací. Pak*

$$\mathscr{F}\left[f'(t)\right](\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Důkaz. Argumentace se opírá o metodu integrace per partes. Musíme ovšem nejdřív dokázat, že $f(t)$ má nulovou limitu v nekonečnu. Opravdu, díky integrovatelnosti funkce $f'(t)$ máme

$$\int_0^{\infty} f'(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{t \to \infty} f(t) - f(0),$$

což zaručuje existenci limity $\lim_{t \to \infty} f(t)$. Vzhledem k tomu, že $f(t)$ samotná je integrovatelná, musí být $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$.

Nyní použijeme metodu per-partes.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t = \left[f(t) e^{-i\omega t}\right]_{t=-\infty}^{t=\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t = i\omega \hat{f}(\omega).$$

□

Pravidlo můžeme postupně aplikovat na derivace vyšších řádů a zobecnit tak do následující podoby.

Důsledek 2.4.8. *Předpokládejme, že $f, f', \dots, f^{(k)}$ jsou spojité a integrovatelné funkce. Pak Fourierovým obrazem k-té derivace $f^{(k)}(t)$ je funkce*

$$\mathscr{F}\left[f^{(k)}(t)\right](\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega).$$

Navíc podle Riemannova-Lebesgueova lemmatu je

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \omega^k \hat{f}(\omega) = 0.$$

Poslední limita říká, že obrazy funkcí s integrovatelnými derivacemi do k-tého řádu mají Furierovy transformace pokles v nekonečnu alespoň jako reciproká hodnota polynomu k-tého stupně.

Větu o obrazu derivace je možno přeformulovat následujícím způsobem. Předpokládejme, že kdykoliv to potřebujeme, platí věta o inverzní Fourierově transformaci. Pak můžeme vyjádřit pravidlo o obrazu derivace následujícím způsobem:

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \,\mathrm{d}\omega.$$

Dosadíme za t hodnotu $-t$ a upravíme:

$$-2\pi i f'(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}\omega. \tag{2.5}$$

Označíme-li $g(\omega) = \hat{f}(\omega)$, pak je $f(t)$ inverzní obraz funkce $g(\omega)$. Na levé straně předchozí rovnosti tak máme

$$-2\pi i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\check{g}\right)(-t).$$

Derivujme nyní identitu

$$\check{g}(s) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-s)$$

podle s. (Musíme použít pravidlo o derivaci složené funkce.)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\check{g}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{2\pi}\hat{g}(-s)\right] = -\frac{1}{2\pi}\hat{g}'(-s).$$

Dosazením $s = -t$ v předchozím vztahu pak můžeme upravit levou stranu rovnosti (2.5) a dostaneme nakonec $i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{g}(t)$.

Na pravé straně (2.5) máme Fourierův obraz funkce $\omega \mapsto \omega \hat{f}(\omega)$ vyčíslený v bodě t. Vrátíme-li se do nejčastěji používaného značení pro argumenty, získáváme následující pravidlo: Je-li $tf(t)$ integrovatelná funkce, pak její obraz je funkce $h(\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega)$. Toto pravidlo, zvané pravidlo o derivaci obrazu, je obsahem následující věty.

Věta 2.4.9 (Derivace obrazu)**.** *Ať jsou funkce $f(t)$ a $tf(t)$ integrovatelné. Pak platí*

$$\mathscr{F}\left[tf(t)\right](\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega).$$

Důkaz. Pravidlo plyne přímo z věty o derivaci integrálu závislého na parametru. (Ve většině případů se dá ale odvodit z věty o obrazu derivace pomocí úvahy před touto větou.) $\square$

Iterativním způsobem se dá výše uvedené pravidlo rozšířit i na vyšší mocniny.

Důsledek 2.4.10. *Jsou-li funkce $t^l f(t)$, $0 \leq l \leq k$, integrovatelné, pak*

$$\mathscr{F}\left[t^k f(t)\right](\omega) = i^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\omega^k} \hat{f}(\omega).$$

Příklad 2.4.11. Uvažujme funkci

$$f(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Potom

$$\hat{f}(\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}} = -i\sqrt{2\pi}\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

$\blacksquare$

2.5 Konvoluce

V dalším výkladu se budeme věnovat operaci konvoluce, která dvojici integrovatelných funkcí přiřadí další integrovatelnou funkci. Tato operace se použije téměř vždy, když řešíme diferenciální rovnici (obyčejnou či parciální). V teorii signálů odpovídá například filtraci signálu. V souvislosti s Fourierovou transformací si můžeme položit následující otázku. Jaký vzor má ve Fourierově transformaci součin dvou Fourierových obrazů. Odpovědí je právě konvoluce.

Definice 2.5.1. Nechť f a g jsou integrovatelné funkce. *Konvoluce* funkcí f a g je funkce $h = f * g$ daná vztahem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Dá se ukázat, že konvoluce je opět integrovatelná funkce. Z definice navíc plyne, že tato operace je komutativní, tj. $f * g = g * f$.

Příklad 2.5.2. Je dána bránová funkce

$$f_a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-a, a], \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Spočtěme funkci $h = f_a * f_a$. Z definice konvoluce máme

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(\tau)f_a(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Integrujeme vlastně konstantní jednotkovou funkci přes průnik intervalů

$$[-a, a] \cap [t-a, t+a].$$

Výsledkem je délka průniku. Tímto dostáváme:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < -2a, \\ t + 2a, & t \in [-2a, 0), \\ 2a - t, & t \in [0, 2a], \\ 0, & t > 2a. \end{cases}$$

■

Stěžejní vlastností Fourierovy transformace (a dalších transformací) je skutečnost, že převádí konvoluci na prostý součin.

Věta 2.5.3 (Obraz konvoluce)**.** *Nechť f, g jsou integrovatelné funkce. Pak pro $h = f * g$ platí*

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Důkaz. Důkaz je založen na Fubiniho větě. Předpoklad ve Fubiniho větě je splněn, neboť (díky Tonelliho větě) platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left| f(\tau)g(t-\tau)e^{-i\omega t} \right| \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \,\mathrm{d}u \right) < \infty. \end{aligned}$$

Jsme tedy oprávněni měnit pořadí integrace a provést následující výpočet:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}t \right) f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega u}\,\mathrm{d}u \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \right) = \hat{g}(\omega)\hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

□

Příklad 2.5.4. Uvažujme trojúhelníkový impulz:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -2a, \\ t + 2a, & t \in [-2a, 0), \\ 2a - t, & t \in [0, 2a], \\ 0, & t > 2a. \end{cases}$$

Již dříve jsme nalezli, že platí $f(t) = f_a(t) * f_a(t)$, kde

$$f_a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-a, a], \\ 0, & \text{jinde}. \end{cases}$$

Podle věty o obrazu konvoluce je

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \left(2\frac{\sin(a\omega)}{\omega} \right)^2 = \frac{4\sin^2(a\omega)}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4a^2, & \omega = 0. \end{cases}$$

■

Nyní si ukážeme způsob, kterým se konvoluce uplatňuje při ořezání frekvencí daného signálu. Představme si signál $f(t)$ s Fourierovou transformací $\hat{f}(\omega)$. Rozhodneme se ze signálu odfiltrovat frekvence, jejichž absolutní hodnoty přesáhnou práh $\omega_0 > 0$. Chceme tedy ze signálu vyfiltrovat vysoké frekvence a nízké frekvence zachovat (filtr, který má tyto vlastnosti, se nazývá dolní propust). Jinými slovy hledáme signál $g(t)$, který má Fourierovu transformci $\mathbf{1}_{[-\omega_0,\omega_0]}(\omega)\hat{f}(\omega)$. Vidíme, že Fourierův obraz funkce $g(t)$ je součinem charakteristické funkce intervalu $[-\omega_0,\omega_0]$ a obrazu $\hat{f}(\omega)$. Oba činitele umíme invertovat. Na základě obrazu bránové funkce spočítáme, že inverze k funkci $\mathbf{1}_{[-\omega_0,\omega_0]}$ je (pro $t \neq 0$) lineárně tlumená sínusovka

$$t \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\omega_0 t)}{t}.$$

Funkce $g(t)$ je pak konvolucí

$$g(t) = f(t) * \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}.$$

V integrálním tvaru máme

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{\sin\left(\omega_0(t-s)\right)}{t-s}\,\mathrm{d}s.$$

Konvoluce se často počítá pomocí Fourierových obrazů. Typický je v tomto ohledu konvolutivní součin gaussovských funkcí.

Příklad 2.5.5. Pomocí Fourierovy transformace nalezneme konvoluci

$$h(t) = e^{-at^2} * e^{-bt^2},$$

kde $a, b > 0$. Z věty o obrazu konvoluce plyne, že

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{\omega^2}{4b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}e^{-\frac{\omega^2}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}.$$

Nyní provedeme inverzi a dostaneme, že konvolutivní součin je opět gaussovská funkce tvaru

$$h(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\,e^{-(\frac{ab}{a+b})\,t^2}.$$

■

Fourierova transformace je důležitým nástrojem řešení diferenciálních rovnic všeho druhu.

Příklad 2.5.6. Řešme na $\mathbb{R}$ diferenciální rovnici

$$y''(t) - y(t) = e^{-t^2}.$$

Budeme předpokládat, že řešením je integrovatelná funkce. Pravou i levou stranu diferenciální rovnice transformujeme, čímž dostaneme

$$-\omega^2\hat{y}(\omega) - \hat{y}(\omega) = \mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega)\,.$$

Fourierův obraz řešení je

$$-\hat{y}(\omega) = \frac{\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega)}{\omega^2+1}.$$

Použijeme-li větu o obrazu konvoluce, získáme

$$-y(t) = e^{-t^2} * \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\omega^2}\right](t)\,.$$

S využitím výsledku o obrazu racionální funkce $\frac{1}{t^2+1}$ máme

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\omega^2}\right](t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}.$$

Rozepsáno do integrálního tvaru dostáváme

$$y(t) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}e^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

■

2.6 Skalární součin a Fourierova transformace

Fourierova transformace je kompatibilní se skalárním součinem na prostoru funkcí $L^2(\mathbb{R})$. Symbolem $L^2(\mathbb{R})$ rozumíme prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem, tj. funkcí $f(t)$, pro které platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty.$$

V termínech teorie signálů se hovoří o signálech s konečnou energií. Skalární součin dvou funkcí f a g z $L^2(\mathbb{R})$ se definuje jako integrál

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Fourierova transformace v podstatě zachová skalární součin pro všechny nekonečně diferencovatelné funkce.

Tvrzení 2.6.1. *Nechť f a g jsou spojitě diferencovatelné funkce s omezeným nosičem. Pak platí*

(i) *$\hat{f}$ je v $L^2(\mathbb{R})$.*

(ii)

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}, \hat{g}\right\rangle.$$

Důkaz. (i) První derivace $f'(t)$ je spojitá funkce s omezeným nosičem, a tedy integrovatelná. Podle Riemannova-Lebesgueova lemmatu má její Fourierův obraz nulovou limitu v nekonečnech. Podle věty o obrazu derivace tak máme $\lim_{\omega\to\pm\infty}\left|\omega\hat{f}(\omega)\right| = 0$. Z věty o limitě složené funkce proto dostaneme

$$\lim_{\omega\to\pm\infty}\omega^2\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 = 0.$$

Tedy na jistém okolí nekonečna platí nerovnost

$$\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \leq \frac{1}{\omega^2}.$$

Volme $c > 0$ libovolně. Protože funkce $\frac{1}{\omega^2}$ je integrovatelná na intervalech $(-\infty, -c)$ a (c, ∞), je na těchto intervalech integrovatelná i funkce $\left|\hat{f}(\omega)\right|^2$. Funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$, a proto z Riemannova-Lebesgueova lemmatu plyne, že $\hat{f}$ je spojitá. Tedy $\left|\hat{f}(\omega)\right|^2$ je integrovatelná na intervalu $[-c, c]$. Tím jsme dokázali, že $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Podle věty o obrazu konjugované reflexe a konvoluce máme, že se funkce $f(t) * \overline{f(-t)}$ zobrazí na funkci $\left|\hat{f}(\omega)\right|^2$. Podle věty o inverzní Fourierově transformaci platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\overline{f(\tau - t)}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega.$$

Pro $t = 0$ pak máme

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \left\langle \hat{f}, \hat{f} \right\rangle.$$

Dokazovaná rovnost tedy platí pro $f = g$. Pro obecná f a g plyne z tzv. polarizační identity:

$$\langle f, g \rangle = \langle f + g, f + g \rangle - \langle f - g, f - g \rangle + i \langle f + ig, f + ig \rangle - i \langle f - ig, f - ig \rangle .$$

□

Právě dokázané tvrzení říká, že se energie signálu Fourierovou transformací nemění. Z matematického pohledu je pak základem pro teorii Fourierovy transformace v prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Kapitola 3

Laplaceova transformace

3.1 Definice a příklady

Laplaceova transformace je další z integrálních transformací. Na rozdíl od Fourierovy transformace dokáže zacházet i s lineárními kombinacemi exponenciálních funkcí, které se typicky vyskytují při řešení autonomních diferenciálních rovnic. Tato skutečnost je základem aplikace Laplaceovy transformace pro řešení rovnic matematické fyziky s počátečními podmínkami a pro studium dynamických systémů.

Definice 3.1.1. Předpokládejme, že $f(t)$ je funkce definovaná na intervalu $[0, \infty)$ s hodnotami v komplexních číslech. *Laplaceova transformace funkce* $f(t)$ je komplexní funkce $F(s)$ daná vztahem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t.$$

Za definiční obor Laplaceova obrazu $F(s)$ považujeme množinu všech komplexních čísel s, pro která existuje výše uvedený integrál.

Laplaceova transformace poměřuje danou funkci $f(t)$ s komplexní exponenciální funkcí e^{-st}. Pro s s kladnou reálnou částí má e^{-st} nulovou limitu v nekonečnu. Díky tomuto tlumícímu efektu existuje integrál v definici Laplaceovy transformace pro relativně širokou třídu funkcí. To je jeden z významných rozdílů mezi Laplaceovou a Fourierovou transformací. Laplaceova transformace je navíc jednostranná ve smyslu integrace přes interval $[0, \infty)$. Laplaceovou transformací vzniká komplexní funkce definovaná typicky v pravé polorovině $\operatorname{Re} s > a$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$.

V dalším výkladu budeme používat následující značení pro jednotkový skok v nule:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Funkce $f(t)$ a $\mathbf{1}(t) f(t)$ mají stejnou Laplaceovu transformaci, a proto je budeme často v této kapitole ztotožňovat. Pro skutečnost, že funkce $F(s)$ je Laplaceovou transformací funkce $f(t)$ budeme používat tyto zápisy:

$$f \doteq F, \quad \mathscr{L}[f(t)](s) = F(s).$$

Podívejme se na základní Laplaceovy obrazy.

Příklad 3.1.2. Je dána funkce

$$f(t) = \mathbf{1}(t).$$

Pro komplexní číslo s s $\operatorname{Re} s > 0$, máme

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Laplaceův obraz je definován pro všechna s s kladnou reálnou částí. ■

Příklad 3.1.3. Pro $a \in \mathbb{C}$ nenulové uvažujme funkci

$$f(t) = e^{at}.$$

Jestliže $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$, potom

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

Laplaceův obraz je v tomto případě definován v polorovině $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$. ■

Příklad 3.1.4. Stanovme obraz funkce

$$f(t) = \cos t.$$

Pro $\operatorname{Re} s > 0$ máme

$$F(s) = \mathscr{L}\left[\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\right](s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}.$$

■

Příklad 3.1.5. Stanovme obraz funkce

$$f(t) = \sin t.$$

Je-li $\operatorname{Re} s > 0$, potom

$$F(s) = \mathscr{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\right](s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2i}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}.$$

■

Přirozeným jádrem definičního oboru Laplaceovy transformace jsou funkce nejvýše exponenciálního růstu, které jsou integrovatelné na každém konečném intervalu. Tyto funkce budeme nazývat předměty standardního typu.

Definice 3.1.6. Funkce $f(t)$ definovaná na nezáporné části reálné osy se nazývá *funkce třídy L_0* (též *předmět standardního typu*), jestliže

(i) $f(t)$ je po částech spojitá,

(ii) $f(t)$ je nejvýše exponenciálního růstu, tj. existují konstanty $\alpha, M \geq 0$ tak, že

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \qquad \text{pro všechna } t \geq 0\,.$$

Číslo α se přitom nazývá *index růstu* funkce $f(t)$.

Množinu všech funkcí třídy L_0 označíme symbolem L_0.

Index růstu není jednoznačně definován. Je-li totiž α index růstu funkce $f(t)$, pak také každé reálné číslo větší než α je index růstu funkce $f(t)$.

Všechny omezené po částech spojité funkce jsou v L_0, a to s indexem růstu $\alpha = 0$. Dále platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je mocninná funkce

$$f(t) = t^n$$

v L_0, neboť

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = 0$$

pro všechna $\alpha > 0$. Nulovost limity znamená, že funkce $f(t)$ má jeden z indexů růstu $\alpha = 1$. (V tomto případě je každé kladné číslo indexem růstu.) Pomocí trojúhelníkové nerovnosti se snadno odvodí, že množina L_0 je uzavřena na lineární kombinace a součiny. V důsledku toho je $p(t) \in L_0$ pro každý polynom $p(t)$. Samotná exponenciální funkce

$$f(t) = e^{at},$$

kde $a \in \mathbb{C}$, je v množině L_0. Přitom $\operatorname{Re} a$ je indexem růstu (nejmenším možným). V důsledku toho je každý každý kvazipolynom (součin polynomu a exponenciální funkce) v L_0. Laplaceova transformace tak umožňuje zpracovat všechny funkce, které vznikají jako řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Ne všechny funkce jsou ovšem ve třídě L_0. Příkladem je funkce $f(t) = e^{t^2}$. Pro každé kladné α má totiž podíl

$$\frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}}$$

nekonečnou limitu pro $t \to \infty$.

3.2 Vlastnosti Laplaceovy transformace

Podobně jako u Fourierovy transformace má i Laplaceova transformace svá základní pravidla.

Tvrzení 3.2.1 (Základní gramatika Laplaceovy transformace)**.**

(i) *Nechť* $f_1, f_2 \in L_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Pak*

$$\mathscr{L}\left[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\right](s) = \alpha \mathscr{L}\left[f_1\right](s) + \beta \mathscr{L}\left[f_2\right](s)\,.$$

(ii) *Nechť* $f \in L_0$ *a nechť* $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = F(s)$. *Pak, pro* $a \in \mathbb{C}$,

$$\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = F(s-a).$$

(iii) *Nechť* $f \in L_0$ *a nechť* $\mathscr{L}[f(t)](s) = F(s)$. *Pak pro* $\alpha > 0$ *je*

$$\mathscr{L}[f(\alpha t)](s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Důkaz. Pravidla jsou založena na jednoduchých substitucích v integrálu podobně jako u Fourierovy transformace. □

Příklad 3.2.2. Spočteme si nyní obrazy několika důležitých funkcí. Pro $\omega > 0$ a $al \in \mathbb{C}$ máme

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\sin(\omega t)](s) &= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2}+1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2};\\
\mathscr{L}[\cos(\omega t)](s) &= \frac{1}{\omega}\frac{p}{\omega}\frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2}+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2};\\
\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\sin(\omega t)\right](s) &= \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

■

Následující věta je stěžejním principem, který říká, že Laplaceovy obrazy jsou holomorfní funkce v komplexní polorovině. Můžeme na ně tedy aplikovat aparát komplexní analýzy. Její aplikací je výpočet Laplaceova obrazu funkce $tf(t)$ na základě znalosti obrazu funkce $f(t)$.

Věta 3.2.3 (Věta o derivaci obrazu)**.** *Předpokládejme, že* $f(t)$ *je po částech spojitá funkce na intervalu* $(0,\infty)$ *a* $c > 0$ *je takové, že konverguje integrál*

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-ct}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Pak Laplaceova transformace $F(s)$ *funkce* $f(t)$ *je definována v polorovině* $\operatorname{Re} s > c$ *a je v této polorovině holomorfní. Platí dále, že*

$$F'(s) = -\int_0^\infty t f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. V reálném případě můžeme větu dokázat pomocí věty a derivaci integrálu závislého na parametru. Komplexní případ je složitější a vyžaduje jemnější argumenty. Ukážeme nejdříve, že pro každé $c' > c$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_0^\infty t^k\, |f(t)|\, e^{-c't}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Tím bude dokázáno i první tvrzení ($k = 0$). Vyjdeme z limity

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^k e^{-c't}}{e^{-ct}} = \lim_{t\to\infty} t^k e^{(c-c')t} = 0.$$

To znamená, že na jistém okolí nekonečna máme odhad

$$\left|t^k f(t) e^{-c't}\right| \le \left|e^{-ct} f(t)\right|.$$

Podle srovnávacího kritéria pak dostaneme, že

$$\int_0^\infty \left| t^k f(t) e^{-c't} \right| \mathrm{d}t < \infty.$$

Laplaceův obraz funkce $f(t)$ je tedy definován v polorovině $\operatorname{Re} s > c$. Ukážeme, že má v každém bodě této poloroviny derivaci. Zvolme za tímto účelem pevné s v této polorovině a položme

$$2\eta = \operatorname{Re} s - c > 0. \tag{3.1}$$

Zvolme nyní h s $|h| < \eta$, které poslouží jako diference ve výrazu pro derivaci funkce $F(s)$ v bodě s. Naším cílem bude ukázat, že funkce

$$\frac{F(s+h) - F(s)}{h} - \int_0^\infty -t f(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t \tag{3.2}$$

má nulovou limitu pro $h \to 0$. Rozepíšeme-li si hodnoty funkce F do integrálního tvaru, můžeme výraz (3.2) upravit do podoby

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) \mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Rozebereme si nyní výraz v závorce v předchozím integrálu.

$$\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t = \frac{e^{-ht} - 1 + ht}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n h^n t^n}{n!} = ht^2 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+2)!} h^n t^n.$$

Aplikací trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\left| \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+2)!} h^n t^n \right| \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+2)!} |h|^n t^n \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} |h|^n t^n = e^{t|h|}.$$

Máme takto odhad

$$\left| \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right| \leq |h| \, t^2 e^{t|h|}. \tag{3.4}$$

Nyní můžeme odhadnout výraz (3.3)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) \mathrm{d}t \right| &\leq |h| \int_0^\infty \left| f(t) e^{-st} \right| t^2 e^{t|h|} \, \mathrm{d}t \\ &\leq |h| \int_0^\infty |f(t)| \, t^2 e^{-(c+\eta)t} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Při posledních odhadech jsme použili rovnost (3.1) a nerovnost $|h| \leq \eta$, z kterých plyne, že

$$\left| e^{-st} \right| e^{t|h|} = e^{-(\operatorname{Re} s)t} e^{t|h|} \leq e^{-(c+\eta)t}.$$

Navíc víme, podle začátku důkazu, že integrál $\int_0^\infty |f(t)| \, t^2 e^{-ct} e^{-\eta t} \, \mathrm{d}t$ existuje. $\square$

Velice často budeme používat následující důsledek předchozí věty.

Důsledek 3.2.4. *Předpokládejme, že $f \in L_0$ má Laplaceův obraz $F(s)$. Potom*

(i) *Existuje* $\alpha \geq 0$ *tak, že* $F(s)$ *je holomorfní v polorovině* $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \alpha\}$.

(ii) $\lim_{\operatorname{Re} s \to \infty} F(s) = 0$.

Důkaz. Tvrzení (i) plyne z předchozí věty, kde můžeme volit c jako index růstu funkce $f(t)$.

Dokažme nyní bod (ii). Předpokládejme, že

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t},$$

kde $M, \alpha \geq 0$. Vezměme $s \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re} s > \alpha$. Pak můžeme odhadnout

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\infty Me^{\alpha t}e^{-(\operatorname{Re} s)t}\,\mathrm{d}t = \left[M\frac{e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)t}}{\alpha - \operatorname{Re} s} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{M}{\operatorname{Re} s - \alpha} \to 0$$

pro $\operatorname{Re} s \to \infty$. □

Nyní se podívejme, jak lze aplikací Věty o derivaci obrazu spočítat obraz mocniny, a tedy i jakéhokoliv polynomu.

Příklad 3.2.5. Matematickou indukcí ukažme, že

$$\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Je-li $n = 1$, potom

$$\mathscr{L}\left[t\right](s) = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2}.$$

Předpokládejme, že dokazovaný vztah platí pro $n = k$. Pak

$$\mathscr{L}\left[t^{k+1}\right](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}\left[t^k\right](s) = -\left(\frac{k!}{s^{k+1}}\right)' = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}.$$

■

Další sada pravidel se týká posunů funkcí. Mějme kladný parametr a. Posuneme-li graf funkce $f(t)\mathbf{1}(t)$ o a doprava dostaneme funkci

$$f(t-a)\mathbf{1}(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & t > a, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Věta 3.2.6 (Věta o translaci)**.** *Pro funkci* $f(t)$ *s Laplaceovým obrazem* $F(s)$ *a* $a > 0$ *platí*

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-a)f(t-a)\right](s) = e^{-as}F(s).$$

Důkaz. Z definice Laplaceovy transformace máme

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-a)f(t-a)\right](s) &= \int_0^\infty \mathbf{1}(t-a)f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(u)e^{-s(a+u)}\,\mathrm{d}u = e^{-as}\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,\mathrm{d}u = e^{-as}F(s), \end{aligned}$$

kde jsme ve třetí rovnosti využili substituci $u = t - a$. □

Rovnost z věty o translaci můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-a)f(t)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)\,.$$

Příklad 3.2.7.

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\frac{1}{s}.$$

■

Příklad 3.2.8. Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,2) \\ e^t & t \geq 2. \end{cases}$$

Zapíšeme-li předpis funkce $f(t)$ pomocí jednotkového skoku, dostaneme

$$f(t) = \mathbf{1}(t-2)e^t.$$

Využitím věty o translaci tak máme

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = e^{-2s}\mathscr{L}\left[e^{t+2}\right](s) = e^{-2s}\frac{e^2}{s-1}.$$

■

Nyní si budeme formalizovat počítání Laplaceových obrazů funkcí s konečným nosičem neboli konečných impulzů. Obecně můžeme zadat konečný impulz následujícím způsobem: Ať je $0 \leq a < b$ a $f(t)$ funkce definovaná na nějakém intervalu obsahujícím interval $[a,b]$. Definujeme

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a,b) \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Použijeme-li formalizmus jednotkového skoku, je

$$h(t) = f(t)[\mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-b)].$$

Toto vyjádření umožní použít větu o translaci.

Příklad 3.2.9. Ať $a > 0$. Spočtěme obraz konečného impulzu

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a,2a) \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože $f(t) = \mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-2a)$, je

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = e^{-as}\frac{1}{s} - e^{-2as}\frac{1}{s}.$$

■

Nyní se podíváme na obraz periodické funkce.

Věta 3.2.10 (Obraz periodické funkce)**.** *Je-li $f \in L_0$ periodická funkce s periodou $T > 0$, pak Laplaceův obraz funkce f je funkce*

$$F(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1 - e^{-sT}}. \tag{3.5}$$

Důkaz. Rozdělíme si interval $[0, \infty)$ na dílčí intervaly jednotkové délky. Díky tomu můžeme psát

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Uplatníme-li substituci $t = nT + x$, dostaneme

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(nT + x)e^{-s(nT+x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T f(x)e^{-sx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^T f(x)e^{-sx}\,\mathrm{d}x \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-sT}\right)^n = \frac{\int_0^T f(x)e^{-sx}\,\mathrm{d}x}{1 - e^{-sT}}. \end{aligned}$$

(V poslední fázi jsme sečetli geometrickou řadu s kvocientem e^{-sT}, který je v absolutní hodnotě menší než jedna.) □

Čitatel ve vztahu (3.5) pro obraz periodické funkce je vlastně obraz funkce $f(t)\left(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T)\right)$ s konečným nosičem. Jako takový se většinou počítá pomocí věty o translaci.

Příklad 3.2.11. Ať $a > 0$. Nalezněme obraz periodického prodloužení funkce

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, 2a), \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

s periodou $T = 2a$.

Nejdříve stanovíme obraz konečného impulzu

$$\mathbf{1}(t - a) - \mathbf{1}(t - 2a) \doteq e^{-sa}\frac{1}{s} - e^{-2sa}\frac{1}{s}.$$

Podle (3.5) potom je

$$F(s) = \frac{1}{s}\frac{\left(e^{-as} - e^{-2as}\right)}{1 - e^{-2as}} = \frac{e^{-as}\left(1 - e^{-as}\right)}{s\left(1 - e^{-as}\right)\left(1 + e^{-as}\right)} = \frac{e^{-as}}{s\left(1 + e^{-as}\right)} = \frac{1}{s\left(1 + e^{as}\right)}.$$

■

Věta 3.2.12 (Obraz mocninné řady)**.** *Předpokládejme, že $f \in L_0$ a jsou splněny následující dvě podmínky:*

(i)
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

pro všechna $t \geq 0$.

(ii) *Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}}$$

konverguje na jistém okolí nekonečna.

Pak funkce

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

je Laplaceovým obraz funkce $f(t)$.

Důkaz. Ukážeme nejdříve, že koeficienty a_n splňují růstovou podmínku

$$|a_n| \leq K \frac{\alpha^n}{n!}, \text{ pro všechna } n, \tag{3.6}$$

kde $K \geq 0$ a $\alpha > 0$. K tomu využijeme integraci Laurentovy řady člen po členu. Nechť C je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem $R > 0$, která celá leží v okolí nekonečna, na kterém konverguje Laurentova řada. Pak platí

$$\int_C s^n F(s)\,\mathrm{d}s = \int_C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k k!}{s^{k+1-n}}\,\mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k! \int_C \frac{1}{s^{k+1-n}}\,\mathrm{d}s = 2\pi i a_n n!.$$

Tedy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i n!} \int_C s^n F(s)\,\mathrm{d}s.$$

Označme $K = R \max_{s \in C} |F(s)|$ a $\alpha = R$. Standardním odhadem absolutní hodnoty křivkového integrálu máme

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{2\pi} 2\pi R R^n \max_{s \in C} |F(s)| = \frac{K\alpha^n}{n!}.$$

Budeme nyní studovat rozdíl mezi Laplaceovým obrazem funkce $f(t)$ a částečnými součty příslušné řady.

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{n!}{s^{n+1}} \right| \leq \int_0^{\infty} \left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \right| e^{-(\operatorname{Re} s)t}\,\mathrm{d}t.$$

Nyní odhadneme zvlášť výraz v absolutní hodnotě v posledním integrálu. Za tímto účelem použijeme růstovou podmínku pro koeficienty a_n odvozenou výše. Tedy

$$\left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n t^n \right| \leq K \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = K \left(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \right).$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{n!}{s^{n+1}} \right| &\leq K \int_0^{\infty} \left(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \right) e^{-(\operatorname{Re} s)t}\,\mathrm{d}t \\
&= K \left(\frac{1}{\operatorname{Re} s - \alpha} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha^n}{(\operatorname{Re} s)^{n+1}} \right) \\
&= K \left(\frac{1}{\operatorname{Re} s - \alpha} - \frac{1}{\operatorname{Re} s} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\alpha}{\operatorname{Re} s} \right)^n \right).
\end{aligned}$$

Pro $\operatorname{Re} s > \alpha$ vidíme, že geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{Re} s}\right)^n$ je konvergentní a má součet $\frac{\operatorname{Re} s}{\operatorname{Re} s-\alpha}$. Tímto pravá strana posledního odhadu konverguje k nule pro $N \to \infty$. To implikuje, že

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^n}\,.$$

Tím je důkaz ukončen. □

Předchozí věta má zásadní význam pro počítaní inverzní Laplaceovy transformace, neboť generuje věty o rozkladu.

Příklad 3.2.13. Vyjádřeme pomocí Laurentovy řady se středem v nekonečnu Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Na základě standardního rozvoje máme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Zkoumejme konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)! s^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) s^{2n+1}}.$$

Tato řada má stejný (vnitřní) poloměr konvergence jako řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^{2n+1}},$$

která konverguje pro $|s| > 1$. Z věty o obrazu rozvoje tak máme

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) s^{2n+1}}$$

pro $\operatorname{Re} s > 1$. ■

Pravidlo o obrazu derivace má podobný důkaz jako v případě Fourierovy transformace. Na rozdíl od ní se zde ovšem objeví hodnoty příslušné funkce a jejích derivací v nule.

Věta 3.2.14 (Věta o obrazu $n-$ té derivace)**.** *Nechť funkce $f(t)$ má derivace do n-tého řádu, které náleží do třídy L_0. Označme $F(s)$ Laplaceův obraz funkce f. Pak*

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).$$

Důkaz. Pravidlo postačí dokázat pro $n = 1$, pro ostatní derivace můžeme použít matematickou indukci. Volme s s reálnou částí větší než index růstu funkce $f(t)$. Pro takové s platí, že $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$. Označme jako $G(s)$ Laplaceův obraz funkce $f'(t)$. Metodou integrace per partes pak máme

$$G(s) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-s)e^{-st}\,\mathrm{d}t = sF(s) - f(0+).$$

□

Předchozí věta je klíčová pro řešení diferenciálních rovnic. Uvedeme si ukázku jejího použití.

Příklad 3.2.15. Uvažujme diferenciální rovnici

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^t$$

s počátečními podmínkami $y(0+) = y'(0+) = 1$. Pomocí Laplaceovy transformace nalezneme řešení $y(t)$ pro $t > 0$.

Označme si $Y(p) = \mathscr{L}[y(t)](s)$ Laplaceův obraz řešení. Pak platí

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[y'(t)](p) &= sY(s) - y(0+) = sY(s) - 1,\\ \mathscr{L}[y''(t)](s) &= s^2Y(s) - sy(0+) - y'(0+) = s^2Y(s) - s - 1.\end{aligned}$$

Transformujeme nyní celou diferenciální rovnici pomocí Laplaceovy transformace. Využitím linearity Laplaceovy transformace získáme

$$s^2Y(s) - s - 1 - 2sY(s) + 2 + 2Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Po úpravě

$$(s^2 - 2s + 2)Y(s) = \frac{1}{s-1} + s - 1 = \frac{s^2 - 2s + 2}{s-1}.$$

Vyjádřením $Y(s)$ dostaneme

$$Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Laplaceův obraz řešení je tedy funkce $\frac{1}{s-1}$, a proto

$$y(t) = e^t.$$

■

Předchozí příklad ukazuje, že pomocí pravidel pro přímou Laplaceovu transformaci můžeme získat Laplaceův obraz řešení diferenciální rovnice. K tomu, abychom nalezli řešení samotné však potřebujeme určit vzor k tomuto obrazu. V našem konkrétním příkladu byla situace jednoduchá a vzor jsme určili ze znalosti Laplaceova obrazu exponenciální funkce. Ve složitějších příkladech však potřebujeme hlubší znalosti inverzní transformace. Na otázku inverzní Laplaceovy transformace se podíváme podrobněji později.

3.3 Konvoluce

V této sekci se podíváme na konvoluci dvou funkcí z třídy L_0 a její Laplaceovu transformaci.

Definice 3.3.1. Ať f a g jsou funkce z L_0. *Konvoluce* těchto funkcí je funkce $h(t) = f(t) * g(t)$ definovaná pro $t \geq 0$ integrálním vztahem

$$h(t) = \int_0^\tau f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Připomeňme, že funkce třídy L_0 ztotožňujeme s funkcemi dodefinovanými či předefinovanými nulou pro $t < 0$. Díky této konvenci můžeme pro konvoluci $f(t)*g(t)$ psát

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(\tau)f(\tau)\mathbf{1}(t-\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Podobně jako u transformace Fourierovy i Laplaceova transformace zachovává konvolutivní součin.

Věta 3.3.2 (Obraz konvoluce). *Ať $f, g \in L_0$ mají Laplaceovy obrazy $F(s)$ a $G(s)$. Pak konvoluce $h(t) = f(t) * g(t)$ má Laplaceův obraz $F(s)G(s)$.*

Důkaz. Podobně jako u příslušné věty o Fourierově transformaci jsou argumenty založeny na Fubiniho větě. Označme si jako $H(s)$ Laplaceův obraz konvolutivního součinu funkcí f a g. Pak máme

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathbf{1}(\tau)g(t-\tau)\mathbf{1}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) e^{-ts}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathbf{1}(\tau)g(t-\tau)\mathbf{1}(t-\tau)e^{-(t-\tau)s}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Ve vnitřním integrálu provedeme substituci $u = t - \tau$ a dostaneme

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathbf{1}(\tau)\mathbf{1}(u)g(u)e^{-us}\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathbf{1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-su}\mathbf{1}(u)\,\mathrm{d}u = F(s)G(s). \end{aligned}$$

□

3.4 Inverzní Laplaceova transformace

Podstatou inverzní Laplaceovy transformace je nalézt k funkci $F(s)$, definované v pravé komplexní polorovině $\operatorname{Re} s > \alpha$ (kde $\alpha \in \mathbb{R}$), funkci $f(t)$, obvykle z množiny L_0, pro kterou platí, že Laplaceův obraz $f(t)$ je zadaná funkce $F(s)$. Z vlastností Laplaceových obrazů vyplývá, že nutnou podmínkou existence vzoru z L_0 je holomorfnost funkce $F(s)$ v jisté pravé polorovině a nulovost její limity pro $\operatorname{Re} s \to \infty$. Do této kategorie patří ryze lomené racionální funkce.

Tvrzení 3.4.1. *Je-li $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, kde P and Q jsou polynomy, $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$, pak F je Laplaceovým obrazem funkce z L_0.*

Důkaz. Každou racionální ryze lomenou funkci lze rozložit na částečné zlomky, tedy na součet konečně mnoha funkcí typu

$$\frac{A}{(s-a)^n},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a, A \in \mathbb{C}$. Každá takováto funkce má Laplaceův vzor

$$A\frac{e^{at}t^{n-1}}{(n-1)!},$$

jak můžeme lehce ověřit zkouškou. Součet těchto funkcí je vzor k funkci $F(s)$. □

Důkaz předchozího tvrzení nám dává i algoritmus invertování racionální lomené funkce. Ukážeme si to na následujících příkladech.

Příklad 3.4.2. Je dána funkce

$$F(s) = \frac{2(s^2-1)}{(s^2+1)^2}.$$

Rozklad funkce $F(s)$ na částečné zlomky je

$$F(s) = \frac{A}{(s+i)^2} + \frac{B}{(s+i)} + \frac{C}{(s-i)^2} + \frac{D}{(s-i)}.$$

Po určení konstant A, B, C, D dostaneme

$$F(s) = \frac{1}{(s+i)^2} + \frac{1}{(s-i)^2} \doteq te^{-it} + te^{it} = 2t\cos t.$$

■

Příklad 3.4.3. Nalezněme inverzi k funkci

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

Rozklad funkce $F(s)$ na částečné zlomky je

$$F(s) = \frac{A}{s+i} + \frac{B}{(s+i)^2} + \frac{C}{s-i} + \frac{D}{(s-i)^2}.$$

Neznámé konstanty v rozkladu určíme trochu netradičním způsobem. Vidíme, že $\pm i$ je pólem druhého řádu funkce $F(s)$. Tedy koeficient A je vlastně reziduem funkce $F(s)$ v singularitě $-i$. Můžeme tedy uplatnit vztah pro výpočet rezidua ve dvojnásobním pólu, což dává

$$A = \operatorname{res}_{-i} F(s) = \lim_{s\to -i} \left[F(s)(s+i)^2\right]' = \lim_{s\to -i} \left(\frac{1}{(s-i)^2}\right)' = \frac{-2}{(-i-i)^3} = \frac{i}{4}.$$

Díky symetrii rozkladu na částečné zlomky u racionální funkce s reálnými koeficienty máme:

$$C = \overline{A} = -\frac{i}{4}.$$

Koeficient B se dá spočítat přímou limitou

$$B = \lim_{s\to -i} F(s)(s+i)^2 = \frac{1}{(-i-i)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Opět platí

$$D = \overline{B}.$$

Odtud

$$f(t) = -\frac{1}{4}te^{-it} - \frac{1}{4}te^{it} + \frac{i}{4}e^{-it} - \frac{i}{4}e^{it} = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t\,.$$

■

Obecnější než ryze lomené racionální funkce jsou funkce holomorfní v okolí nekonečna mající v nekonečnu nulovou limitu. Takovéto funkce se na jistém okolí nekonečna dají rozvést v Laurentovu řadu se středem v nekonečnu. To nám umožní najít vzor ve tvaru mocninné řady.

Věta 3.4.4 (Věta o rozkladu)**.** *Nechť $F(s)$ je holomorfní funkce v okolí nekonečna s Laurentovým rozvojem*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s^n}.$$

Pak $F(s)$ je Laplaceovým obrazem funkce

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

Důkaz. Jedná se o přímý důsledek věty o obrazu mocninné řady. □

Příklad 3.4.5. Uvažme funkci

$$F(s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s}}.$$

Protože

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{1!}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2! s^3} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s^{k+1}},$$

je

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^k}{k!}.$$

■

3.5 Věta o inverzní Laplaceově transformaci

Věta o Inverzní Fourierově transformaci říká, že inverzní zobrazení k Fourierově transformaci má obecně integrální tvar. Rádi bychom podobnou integrální formu získali i pro inverzní Laplaceovu transformaci.

Začneme s následující úvahou. Předpokládejme, že spojitá funkce $f(t)$ je třídy L_0, má po částech spojitou derivaci a $f(t) = 0$ pro $t < 0$. Existuje tedy $\alpha > 0$ tak, že

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

pro všechna $t \geq 0$. Je-li $x > \alpha$, pak

$$f(t) e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}).$$

To můžeme vidět z odhadu

$$|f(t)| \, e^{-x\,t} \leq M e^{\alpha - x} \mathbf{1}(t) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Zvolme pevně $s = x + iy$, kde $x > \alpha$ a $y \in \mathbb{R}$. Pro hodnotu Laplaceovy transformace v bodě s máme

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = F(x+iy) = \int_0^\infty \left(f(t)e^{-xt}\right) e^{-iyt}\,\mathrm{d}t.$$

Integrál na pravé straně je hodnotou Fourierovy transformace funkce $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ v bodě y. Jinými slovy,

$$F(x+iy) = \mathscr{F}\left[f(t)e^{-xt}\right](y)\,.$$

Nyní můžeme použít větu o inverzní Fourierově transformaci aplikovanou na funkci $f(t)e^{-xt}$. Dostáváme tak

$$f(t)e^{-xt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)e^{iyt}\,\mathrm{d}y$$

pro všechna $t > 0$. Odtud pronásobením předchozí rovnosti výrazem e^{xt} máme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}e^{iyt}F(x+iy)\,\mathrm{d}y.$$

Tím jsme získali integrální vyjádření vzoru $f(t)$ pomocí obrazu $F(s)$. Tento integrál se dá interpretovat jako křivkový integrál přes přímku $\operatorname{Re} s = x$. Skutečně, zvolme nejdříve vertikální úsečku C_R s krajními body $x - iR$ a $x + iR$, kde $R > 0$. Parametrizace této úsečky je

$$\varphi(y) = x + iy, \quad y \in [-R, R].$$

Integrujeme-li ve smyslu uvedené parametrizace (směr zezdola nahoru) obdržíme

$$\int_{C_R} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = \int_{-R}^{R} F(x+iy)e^{xt}e^{iy}i\,\mathrm{d}y.$$

Tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(x+iy)e^{xt+iyt}\,\mathrm{d}y.$$

Limitou pro $R \to \infty$ dostaneme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_x} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s, \tag{3.7}$$

kde L_x je přímka daná parametrizací

$$\varphi(t) = x + it, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Přímce L_x se říká *Bromwichova linie* a vztah (3.7) je znám jako *Riemannův-Mellinův vzorec*. Často používaný alternativní zápis pro vztah (3.7) je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s. \tag{3.8}$$

Všimněme si, že jakmile je $x > \alpha$, všechny integrály v Riemannově-Mellinově vzorci jsou stejné. Předchozí úvahy shrneme v následující větě.

Věta 3.5.1. *Předpokládejme, že $F(s)$ je Laplaceovým obrazem funkce $f \in L_0$, která je po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci, a má index růstu a. Pak pro každé $x > a$ platí*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s.$$

Oproti větě o inverzní Fourierově transformaci vidíme, že integrální vyjádření inverzní Laplacovy transformaci vyžaduje integraci přes kolmici na reálnou osu. Předchozí věta může sloužit jako návod na výpočet inverzní Laplaceovy transformace. Můžeme spočítat integrál na pravé straně a pak se zkouškou přesvědčit, že řešení je správné. Dá se také ukázat, že tato věta platí, jestliže funkce $F(s)$ splňuje jisté růstové podmínky. To je obsahem následující věty, kterou dokazovat nebudeme.

Věta 3.5.2. *Předpokládejme, že $F(s)$ je holomorfní funkce v polorovině $\operatorname{Re} s \geq a > 0$. Předpokládejme, že existují kladné konstanty m, R_0 a přirozené číslo k tak, že*

$$|F(s)| \leq \frac{m}{|s|^k}$$

pro všechna s v uvedené polorovině s $\operatorname{Re} s > R_0$. Pak existuje funkce $f(t)$, jejíž Laplaceův obraz je funkce $F(s)$. Přitom platí

$$f(t) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s.$$

Nyní se budeme věnovat výpočtu integrálu $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s$, $a > 0$, který se vyskytuje v Riemann-Mellinově vzorci. Předpokládejme, že uvedený integrál existuje. K jeho výpočtu můžeme použít reziduovou větu za předpokladu, že jsou splněny následující předpoklady:

(i) Funkce $F(s)$ se dá rozšířit na funkci holomorfní v $\mathbb{C}$ vyjma spočetně mnoha izolovaných singulárních bodů $s_1, s_2, \ldots$ ležících v polorovině

$$\{s \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} s < a\}.$$

(ii) Existuje rostoucí posloupnost poloměrů $R_n > 0$ jdoucích do nekonečna tak, že pro oblouky kružnic

$$K_n = \{s \in \mathbb{C} \,|\, |s| = R_n, \operatorname{Re} s \leq a\}$$

platí

$$\int_{K_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

Označme si jako C_n kladně orientovanou Jordanovu křivku, která je sjednocenim K_n a úsečky L_n s koncovými body $R_n e^{i\psi_n}$ a $R_n e^{-i\psi_n}$, kde ψ_n je úhel v intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$, pro který platí $\cos\psi_n = \frac{a}{R_n}$. Podle reziduové věty máme

$$\int_{C_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = \sum_{s_k \in \operatorname{Int} C_n} \operatorname{res}_{s_k} F(s)e^{st}.$$

Rozepsáním křivkového integrál na levé straně obdržíme

$$\int_{C_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = \int_{K_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s + \int_{L_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s. \tag{3.9}$$

Podle předpokladu je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Na druhé straně je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{L_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s.$$

Provedením limitního přechodu v rovnosti (3.9) máme

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = \sum_n \operatorname{res}_{s_n} F(s)e^{st}. \tag{3.10}$$

Sumu na pravé straně předchozí rovnosti chápeme jako limitu součtů

$$\sum_{s_k\in \operatorname{Int} C_n} \operatorname{res}_{s_k} F(s)e^{st}$$

pro n jdoucí do nekonečna. Závěrem tedy máme, že za jistých předpokladů platí pro vzor $f(t)$ funkce $F(s)$ vztah

$$f(t) = \sum_n \operatorname{res}_{s_n} F(s)e^{st}.$$

Aplikace tohoto vztahu se nazývá metoda reziduí. Dá se použít u některých důležitých funkcí jako jsou racionální funkce a obrazy periodických funkcí. Často se používá heuristicky s tím, že o správnosti se přesvědčíme zkouškou. Klíčové při dokazování správnosti této metody je ukázat podmínku (ii) výše o konvergenci křivkových integrálů k nule. Následující tvrzení říká, že tato podmínka je automaticky splněna pokud funkce $|F(s)|$ má pokles v nekonečnu alespoň jako funkce $\frac{1}{R^k}$, $k > 0$, pro $R \to \infty$.

Tvrzení 3.5.3. *Nechť $F(s)$ je komplexní funkce definovaná na systému křivek K_n specifikovaných výše. Předpokládejme, že v jistém okolí nekonečna platí odhad*

$$|F(s)| \le \frac{M}{|s|^k},$$

kde $M, k > 0$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Důkaz. Obecný důkaz vyžaduje jemné odhady a nebudeme ho provádět. Tvrzení si nicméně dokážeme v důležitém případě $k > 1$, kdy argumenty navíc nejsou komplikované. Parametrizace křivky K_n bude provedena funkcí

$$\varphi(x) = R_n e^{ix},$$

kde $x \in [\psi_n, 2\pi - \psi_n]$, $\psi_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $\cos\psi_n = \frac{a}{R_n}$. V mezích parametrizace tak budeme integrovat funkci

$$G_n(x) = F(R_n e^{ix}) e^{tR_n e^{ix}} iR_n e^{ix} = F(R_n e^{ix}) e^{tR_n \cos x} e^{tR_n i \sin x} iR_n e^{ix}.$$

Použitím předpokladu nyní odhadneme absolutní hodnotu integrované funkce

$$\left| F(R_n e^{ix}) e^{tR_n e^{ix}} iR_n e^{ix} \right| \leq \frac{M}{R_n^{k-1}} e^{tR_n \cos x}.$$

Pro $x \in [\psi_n, \frac{\pi}{2}]$ máme odhad (z monotónie funkce $\cos x$)

$$\left| F(R_n e^{ix}) e^{tR_n e^{ix}} \right| \leq \frac{M}{R_n^k} e^{tR_n \cos\psi_n} = \frac{M}{R_n^k} e^{ta}.$$

Pro $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ vede nerovnost $\cos x \leq 0$ (spolu s nerovností $e^u \leq 1$ platnou pro všechna $u \leq 0$) na odhad

$$\left| F(R_n e^{ix}) e^{tR_n e^{ix}} \right| \leq \frac{M}{R_n^k}.$$

Pro $x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi - \psi_n]$ máme stejně jako v prvním případě odhad

$$\left| F(R_n e^{ix}) e^{tR_n e^{ix}} \right| \leq \frac{M}{R_n^k} e^{tR_n \cos\psi_n} = \frac{M}{R_n^k} e^{ta}.$$

Shrnutím nalezených odhadů tedy vidíme, že existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro všechna $x \in [\psi_n, 2\pi - \psi_n]$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|G_n(x)| \leq \frac{L}{R_n^{k-1}}.$$

Tímto získáme odhad pro příslušný křivkový integrál

$$\left| \int_{K_n} F(s) e^{st} \, \mathrm{d}s \right| \leq \int_{\psi_n}^{2\pi - \psi_n} |G(x)| \, \mathrm{d}x \leq 2\pi \frac{L}{R_n^{k-1}}.$$

Díky nerovnosti $k - 1 > 0$ pak vidíme, že horní odhad konverguje k nule, tj.

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \frac{L}{R_n^{k-1}} = 0.$$

Důsledkem toho je, že $\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} F(s) e^{st} \, \mathrm{d}s = 0$, čímž je důkaz ukončen. □

Podívejme se nyní na ukázkové příklady pro metodu reziduí.

Příklad 3.5.4. Pokusme se nalézt metodou reziduí vzor k funkci

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Funkce $F(s)$ má singularitu v nule a to pól druhého řádu. Metodou reziduí tak dostáváme

$$f(t) = \operatorname{res}_0 \frac{e^{st}}{s^2} = \lim_{s\to 0} (e^{st})' = te^0 = t.$$

Již dříve jsme spočítali, že obraz k $f(t)$ je $F(s)$. Vidíme tedy, že metoda dává správný výsledek. ■

Uvědomme si, že pokud je s pólem prvního řádu funkce $F(s)$, pak

$$\operatorname{res}_{s_n} F(s)e^{st} = (\operatorname{res}_{s_n} F(s))\, e^{s_n t}.$$

U ostatních singularit toto neplatí. Metodu reziduí můžeme použít na racionální funkce. Zde je efektivní alternativou k rozkladu na částečné zlomky a jejich invertování. Výpočet je často rychlejší. Nemusíme hledat koeficienty částečných zlomků ani vzorec pro jejich inverzi. Dokumentuje to série následujících příkladů.

Příklad 3.5.5. Nalezněme inverzní Laplaceovu transformaci $f(t)$ k funkci

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Protože všechny singlartity funkce F jsou jednoduché póly, je

$$f(t) = e^t \operatorname{res}_1 F(s) + e^{2t} \operatorname{res}_2 F(s) + e^{3t} \operatorname{res}_3 F(s) = \frac{e^t}{2} - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

■

Příklad 3.5.6. Nalezněme inverzní Laplaceovu transformaci $f(t)$ k funkci

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)(s-3)}.$$

Bod 1 je pólem druhého řádu. Proto

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_1 \frac{e^{st}}{(s-1)^2(s-2)(s-3)} &= \lim_{s\to 1}\left(\frac{e^{st}}{(s-2)(s-3)}\right)' \\ &= \lim_{s\to 1}\left(\frac{te^{st}}{(s-2)(s-3)} - \frac{2s-5}{(s-2)^2(s-3)^2}e^{st}\right) \\ &= \frac{3}{4}e^t + t\frac{1}{2}e^t.\end{aligned}$$

Ostatní singularity jsou jednoduché póly, a tedy

$$f(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t - e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}.$$

■

Příklad 3.5.7. Nalezněme inverzní Laplaceovu transformaci $f(t)$ k funkci

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

Singularity $\pm i$ jsou póly druhého řádu, a proto

$$\operatorname{res}_i \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} = \lim_{s\to i}\left[\frac{e^{st}}{(s+i)^2}\right]' = \lim_{s\to i}\frac{te^{st}(s+i)^2 - e^{st}2(s+i)}{(s+i)^4} = \frac{-te^{it}}{4} - \frac{ie^{it}}{4}.$$

Podobně

$$\operatorname{res}_{-i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} = \frac{-te^{-it}}{4} + \frac{1}{4}ie^{-it}.$$

Závěrem tak dostáváme

$$f(t) = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

■

Příklad 3.5.8. Nalezněme inverzní Laplaceovu transformaci $f(t)$ k funkci

$$F(s) = \frac{1}{s(1+e^s)}.$$

Funkce $F(s)$ má singularitu v nule a v bodech vyhovujících rovnosti $e^s = -1$, tj. v nekonečně mnoha bodech

$$s_n = (2n+1)i\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Aplikujeme metodu reziduí a spočítáme nejdříve reziduum v jednoduchém pólu nula. Toto reziduum je

$$\operatorname{res}_0 \frac{e^{st}}{s(1+e^s)} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}.$$

Pro jednoduchý pól $s_n = (2n+1)\pi i$ máme

$$\operatorname{res}_{s_n} \frac{e^{st}}{s(1+e^s)} = \frac{e^{ts_n}}{s_n e^{s_n}} = -\frac{e^{t(2n+1)\pi i}}{(2n+1)\pi i}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{t(2n+1)\pi i}}{(2n+1)\pi i} = \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\pi t] + i\sin[(2n+1)\pi t]}{(2n+1)\pi i} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{2n+1}. \end{aligned}$$

Reziduová metoda takto vyjádřila funkci $f(t)$ jako součet Fourierovy řady. Z toho je patrné, že se jedná o periodickou funkci s periodou $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Zajímavým momentem je, že na základě této informace jsme dokonce schopni explicitně stanovit danou funkci, a tím i součet dané Fourierovy řady. Podle věty o obrazu periodické funkce totiž víme, že

$$\frac{1}{s(1+e^s)} = \frac{H(s)}{1-e^{-2s}},$$

kde $H(s)$ je obraz konečného impulzu. Z této identity můžeme $H(s)$ spočítat a dostaneme tak

$$H(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s(1+e^s)} = \frac{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}{s(1+e^{-s})e^s} = \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s} \doteq \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2).$$

Závěrem tedy máme, že $f(t)$ se skládá z obdelníkových imlulzů a má periodu 2. Přesněji

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n-1, 2n), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Neověřovali jsme, zda je použití reziduové metody v tomto případě korektní. Jako lehké cvičení je však možno provést zkoušku a ověřit správnost výpočtu. ■

3.6 Metoda odštěpení polů

Kvazipolynom je součin exponenciální funkce a polynomu, tedy funkce typu

$$f(t) = e^{at}p(t),$$

kde $a \in \mathbb{C}$ a $p(t)$ je polynom. Tento typ funce je důležitý, protože mimo jiné generuje řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Polynom se Laplaceovou transformací zobrazí na racionální funkci. Kvazipolynom se tedy podle pravidla substituce $s \mapsto s - a$ zobrazí opět na racionální funkci. Pokud generujeme funkci s konečným nosičem jako restrikci kvazipolynomu na daný interval, je její Laplaceův obraz rozdíl racionálních funkcí násobených exponenciální funkcí. Pokud takovýto impulz generuje periodickou funkci, je její obraz součtem funkcí následujících tvarů:

$$F(s) = e^{-as}R(s)\frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

kde $a > 0$, $R(s)$ je ryze lomená racionální funkce a $T > 0$.

Pokud budeme schopni invertovat funkci ve výše uvedeném tvaru, budeme moci řešit řadu diferenciálních rovnic s periodickou funkcí na pravé straně. Díky věte o translaci můžeme předpokládat že $a = 0$. Označme

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1 - e^{-sT}}, \qquad H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1 - e^{-sT}}e^{st}, \tag{3.11}$$

kde $t, T > 0$, $P(s)$ a $Q(s)$ jsou polynomy takové, že stupeň polynomu $Q(s)$ je větší než stupeň polynomu $P(s)$. Ať s_1 je kořenem polynomu $Q(s)$, který je pólem funkce $H(s)$ násobnosti l. Při aplikaci reziduové metody vede výpočet Laplaceovy inverze na reziduum

$$\operatorname{res}_{s_1} H(s).$$

Podle pravidla pro reziduum v pólu máme

$$\operatorname{res}_{s_1} H(s) = \lim_{s \to s_1} \frac{1}{(l-1)!}[(s - s_1)^l H(s))]^{(l-1)}. \tag{3.12}$$

Zaměříme se nyní na kvalitativní charakter výše uvedeného výrazu (jako funkce proměnné t). K tomu budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 3.6.1. *Předpokládejme, že $J(s)$ je holomorfní funkce proměnné s v oblasti Ω. Pak platí, že*

$$(J(s)e^{st})^{(m)} = e^{st}\sum_{k=0}^{m} t^k J_k(s),$$

kde $J_k(s)$ jsou holomorfní funkce v Ω.

Důkaz. Podle Leibnizovy formule platí

$$(J(s)e^{st})^{(m)} = \sum_{k=0}^{m}(e^{st})^{(k)}J(s)^{(m-k)} = e^{st}\sum_{k=0}^{m} t^k J(s)^{(m-k)}.$$

Můžeme tedy položit $J_k(s) = J(s)^{(m-k)}$. □

Vraťme se nyní k výpočtu rezidua (3.12). Funkce

$$J(s) = (s - s_1)^l F(s)$$

má v bodě p_1 odstranitelnou singularitu. To vyplývá ze skutečnosti, že $H(s) = F(s)e^{st}$ má v bodě s_1 pól řádu l a totéž musí platit i o funkci $F(s)$, neboť exponenciální funkce je nenulová v každém bodě. Podle Lemmatu 3.6.1 a (3.12) tak máme

$$\operatorname{res}_{s_1} H(s) = e^{s_1 t} \sum_{k=0}^{l-1} a_k t^k.$$

Jinými slovy hledané reziduum je tvaru

$$p_{l-1}(t) e^{s_1 t},$$

kde $p_{l-1}(t)$ je polynom stupně nejvýše $l-1$. Dalšími singularitami funkce $H(s)$ jsou nulové body funkce $1 - e^{-Ts}$, tj. body

$$\frac{2\pi n i}{T} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nekonečně těchto bodů není kořenem polynomu Q. V těchto bodech má $F(s)$ jednonásobné póly. Výpočtem reziduí pak pro takovýto bod s_n dostaneme

$$\operatorname{res}_{s_n} H(s) = \frac{P(s_n)}{Q(s_n)} \frac{1}{s_n} e^{s_n t}.$$

Jinými slovy, jedná se o funkci typu

$$c_n e^{\frac{2n\pi i}{T} t},$$

kde $c_n \in \mathbb{C}$. Součet těchto funkcí je periodická funkce s periodou $T > 0$. Metoda reziduí nám ji vyjádří ve formě Fourierovy řady.

Shrneme si naši dosavadní diskuzi ve formě tvrzení.

Tvrzení 3.6.2. *Je dána funkce*

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{1}{1 - e^{-sT}}.$$

Předpokládejme, že $s_1, \dots, s_k$ jsou nulové body polynomu $Q(s)$, které jsou póly funkce $H(s) = F(s)e^{st}$ s násobnostmi $l_1, l_2, \dots, l_k$. Pak existují polynomy $P_1, \dots, P_k$ stupně nejvýše $l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_k - 1$, a periodická funkce $g(t)$ s periodou T tak, že pro Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $G(s)$ platí

$$f(t) = \sum_{l=1}^{k} P_l(t) e^{s_l t} + g(t).$$

Suma $\sum_{l=1}^{k} P_l(t) e^{p_l t}$ v předchozím tvrzení je kombinací kvazipolynomů a nazýváme ji neustálenou částí funce $f(t)$. Periodickou funkci $g(t)$ nazýváme ustálenou složkou funkce $f(t)$.

Volně řečeno, vzor $f(t)$ se tedy skládá ze dvou částí. Jedna je součet kvazipolynomů a druhá je periodickou funkcí.

Příklad 3.6.3. Určeme inverzní Laplaceovy transformaci k funkci

$$F(s) = \frac{1}{s-2}\frac{1}{1-e^{-3s}}.$$

Polynom $Q(s) = s-2$ má jednonásobný kořen 2. Neustálená složka ve vzoru tedy bude funkce Ae^{2t}, kde A je konstanta. Předem tedy víme, že pro vzor $f(t)$ platí

$$f(t) = Ae^{2t} + g(t), \tag{3.13}$$

kde $g(t)$ je funkce s periodou 3. Protože

$$\operatorname{res}_2 \frac{1}{s-2}\frac{1}{1-e^{-3s}}e^{st} = \frac{1}{1-e^{-6}}e^{2t},$$

je

$$A = \frac{1}{1-e^{-6}}.$$

Laplaceovou transformací rovnice (3.13) máme

$$F(s) = \frac{1}{s-2}\frac{1}{1-e^{-3s}} = \frac{A}{s-2} + \frac{H(s)}{1-e^{-3s}}.$$

Funkce $H(s)$ je obraz konečného impulzu délky 3 generujícího funkci $g(t)$. Pronásobením funkcí $(1-e^{-3s})$ dostáváme

$$H(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{A(1-e^{-3s})}{s-2} \doteq e^{2t} - Ae^{2t} + Ae^{2(t-3)}\mathbf{1}(t-3).$$

Funkce $g(t)$ splývá s výše uvedenou funkcí na intervalu $[0,3)$. Proto

$$g(t) = (1-A)e^{2t}, \quad t \in [0,3).$$

Tento výsledek nám umožňuje napsat analyticky funkci $f(t)$ na jednotlivých intervalech. Pro $t \in [0,3)$ je

$$f(t) = Ae^{2t} + (1-A)e^{2t} = e^{2t}.$$

Pro $t \in [3,6)$ je

$$f(t) = Ae^{2t} + (1-A)e^{2(t-3)} = [A + e^{-6} - Ae^{-6}]e^{2t}.$$

Analogicky dostaneme předpis pro vzor i na dalších intervalech. ∎

Příklad 3.6.4. Určeme inverzní Laplaceovu transformaci k funkci

$$F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})}.$$

Bod 0 je dvojnásobný pól polynomu funkce $F(s)$. Víme tedy, že vzor $f(t)$ bude tvaru

$$f(t) = (At+B)e^{0t} + g(t),$$

kde $A, B \in \mathbb{C}$ a $g(t)$ je periodická funkce s periodou 1. Pro reziduum v 0 máme

$$\operatorname{res}_0 F(s)e^{st} = \lim_{s\to 0} \left(\frac{se^{st}}{1-e^{-s}}\right)' = \lim_{s\to 0} e^{st}\frac{(1+ts)(1-e^{-s}) - se^{-s}}{(1-e^{-s})^2} = \frac{2t+1}{2},$$

kde jsme při výpočtu limity využili dvakrát l'Hospitalovo pravidlo. Tedy

$$f(t) = t + \frac{1}{2} + g(t),$$

kde $g(t)$ má periodu 1.

Nyní nalezněme vyjádření $g(t)$ ve tvaru Fourierovy řady. Pro $n \neq 0$ máme

$$\operatorname{res}_{2n\pi i} F(s)e^{st} = \frac{e^{2n\pi ti}}{2n\pi i}.$$

Proto

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{e^{2in\pi t}}{2in\pi} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n}.$$

Na závěr se podívejme na analytické vyjádření funkce $f(t)$. Obraz $H(s)$ konečného impulzu délky 1 generujícího funkci $g(t)$ získáme ze vztahu

$$F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s} + \frac{H(s)}{1-e^{-s}}.$$

Proto

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}) - \frac{1}{2s}(1-e^{-s}) \doteq 1 - t + (t-1)\mathbf{1}(t-1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{1}(t-1).$$

Odtud

$$g(t) = \frac{1}{2} - t$$

pro všechna $t \in [0, 1)$. Na intervalu $[0, 1)$ tak máme

$$f(t) = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t = 1.$$

Na intervalu $[1, 2)$ tak máme

$$f(t) = t + \frac{1}{2} + g(t-1) = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (t-1) = 2.$$

Podobně dostaneme předpis i na dalších intervalech. Obecně na intervalu $[n-1, n)$, kde $n \in \mathbb{N}$, je

$$f(t) = n.$$

■

Příklad 3.6.5. Určeme kvalitativně inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(1-e^{-s})}$$

a analyzujme jeho chování v nekonečnu.

Rezidua v bodech -1 a -2 jsou

$$\operatorname{res}_{-1} e^{st}F(s) = \frac{e^{-t}}{1-e} = Ae^{-t}, \operatorname{res}_{-2} e^{st}F(s) = -\frac{e^{-2t}}{1-e^2} = Be^{-2t},$$

kde jsme označili $A = \frac{1}{1-e}$ a $B = \frac{-1}{1-e^2}$.

Perioda ustálené složky je 1. Proto

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(1-e^{-s})} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{H(s)}{1-e^{-s}}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} - \frac{A(1-e^{-s})}{s+1} - \frac{B(1-e^{-s})}{s+2} \\ &= \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{A(1-e^{-s})}{s+1} - \frac{B(1-e^{-s})}{s+2}. \end{aligned}$$

Pro $t \in [0,1)$ má tak periodická část tvar

$$g(t) = -e^{-2t} + e^{-t} - Ae^{-t} - Be^{-2t} = (1-A)e^{-t} - (1+B)e^{-2t}.$$

Díky tomu je

$$f(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + g(t).$$

Všimněme si, že neustálená složka konverguje pro $t \to \infty$ k nekonečnu. Pro velké t je tedy $f(t)$ skoro periodická funkce $g(t)$. ■

Kapitola 4

Z-transformace

4.1 Definice a příklady

Laplaceova transformace má důležitou aplikaci pro řešení diferenciálních rovnic. Transformace Z hraje podobnou úlohu při řešení rekurentních rovnic, které popisují stavy diskrétního systému. Jejich základní myšlenkou je přiřadit posloupnosti holomorfní funkci, kterou pak můžeme zkoumat aparátem komplexní analýzy. (Pro „diskrétní“ posloupnost nemá například smysl derivace, integrál, atd.)

Pokusme se pospoupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ přiřadit funkci definovanou řadou následujícím způsobem:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

To je základní myšlenka Z-transformace. Musíme si ale nejdříve rozmyslet, pro jaké posloupnosti má uvedená řada smysl. Budeme chtít určit, pro jaké posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ v jistém okolí nekonečna. Pomůže nám následující tvrzení.

Tvrzení 4.1.1. *Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

konverguje na nějakém okolí nekonečna právě tehdy když existují konstanty $M \geq 0$ *a* $c \in \mathbb{R}$ *tak, že*

$$|a_n| \leq Me^{cn} \tag{4.1}$$

pro všechna nezáporná celá čísla n.

Důkaz. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje ve vnějšku kruhu $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R'\}$. Její součet

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

je na této oblasti holomorfní funkce. Zvolme kladně orientovanou kružnici C se středem v počátku, ležící v oblasti $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R'\}$, tj. s poloměrem $R > R' \geq$

0. Podle integrálního vyjádření koeficientů Laurentovy řady (tady je třeba řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ interpretovat jako řadu se středem v počátku) máme

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z^{-n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^{1-n}} \max_{z\in C} |F(z)| \, 2\pi R = R^n \max_{z\in C} |F(z)| \, .$$

Položíme-li $M = \max_{z\in C} |F(z)|$, je

$$|a_n| \leq MR^n = Me^{n\ln R}.$$

Pro důkaz opačné implikace předpokádejme, že platí odhad (4.1). Odtud

$$\frac{|a_n|}{|z|^n} \leq M\frac{(e^c)^n}{|z|^n}.$$

Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\frac{(e^c)^n}{|z|^n}$$

je pro $|z| > e^c$ geometrická řada s absolutní hodnotou kvocientu

$$\frac{e^c}{|z|} < 1.$$

Dle srovnávacího kritéria konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

pro všechna z splňující $|z| > e^c$. □

Definice 4.1.2. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel je *nejvýše exponenciálního řádu*, jestliže existují konstanty $M \geq 0$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$|a_n| \leq Me^{cn}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Množinu všech komplexních posloupností nejvýše exponenciálního růstu označíme symbolem Z_0.

Ekvivalentně můžeme podmínku v definici posloupnosti nejvýše exponenciálního růstu říci tak, že existují konstanty $M \geq 0$ a $a > 0$ splňující

$$|a_n| \leq Ma^n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 4.1.3. Každá omezená posloupnost je v Z_0. ■

Příklad 4.1.4. Ať p je polynom. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{e^n} = 0.$$

Tedy například

$$|p(n)| \leq e^n$$

pro dostatečně velká n. To znamená, že $(p(n))_{n=0}^{\infty}$ je v Z_0. ■

Příklad 4.1.5. Vzorkování kvazipolynomu je v Z_0 (tj. je-li q kvazipolynom, pak $(q(n))_{n=0}^{\infty}$ je v Z_0). ■

Příklad 4.1.6. Posloupnost $(n^n)_{n=0}^{\infty}$ není v Z_0. Důvodem je limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^{cn}} = \lim_{n\to\infty} e^{n(\ln n - c)} = \infty.$$

■

Příklad 4.1.7. Posloupnost $(n!)_{n=0}^{\infty}$ není v Z_0. To můžeme vidět z podílového kritéria pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z^n}$. Platí totiž

$$\frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} \frac{|z|^n}{n!} = \frac{n+1}{|z|} \to \infty$$

pro $n \to \infty$. Tedy zkoumaná řada nekonverguje v žádném bodě. ■

Definice 4.1.8. *Z-transformace posloupnosti* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je funkce

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Budeme psát $\mathscr{Z}[a_n](z) = F(z)$ nebo $(a_n)_{n=0}^{\infty} \doteq F(z)$, budeme-li chtít vyjádřit fakt, že funkce $F(z)$ je Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.

Dále budeme symbolem K_0 značit množinu funkcí holomorfních na okolí ∞ majících v ∞ vlastní limitu.

Věta 4.1.9. *Z-transformace je prosté zobrazení množiny Z_0 na množinu K_0.*

Důkaz. Vyplývá okamžitě z věty o Laurentově rozvoji. □

Příklad 4.1.10. Z-transformace posloupnosti

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 0, 4, 0, 0, \ldots).$$

je funkce

$$F(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^3}, \quad z \neq 0.$$

■

Příklad 4.1.11. Ať m je pevně zvolené celé nezáporné číslo. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } n = m, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Její Z-transformace je funkce

$$F(z) = \frac{1}{z^m}, \quad z \neq 0.$$

■

Příklad 4.1.12. Z-transformace posloupnosti

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}$$

je funkce

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = e^{\frac{1}{z}}, \quad z \neq 0.$$

■

Příklad 4.1.13. Ať c je nenulové komplexní číslo a

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (c)_{n=0}^{\infty}.$$

Potom

$$\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{z^n} = c\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{cz}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

■

Příklad 4.1.14. Z-transformace posloupnosti

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots).$$

je funkce

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \dots = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{z}{z^2-1}, \quad |z| > 1.$$

■

Příklad 4.1.15. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a^n)_{n=0}^{\infty}$. Pak

$$\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \frac{z}{z-a}$$

pro $|z| > |a|$. ■

Příklad 4.1.16. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž Z-transformace je funkce $F(z)$. Pokusme se nalézt posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, která má Z-transformaci $F(z^2)$.

Protože

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

na jistém okolí nekonečna, je

$$F(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{2n}}$$

na jistém okolí nekonečna. Proto

$$(b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots).$$

■

4.2 Vlastnosti Z-transformace

Tvrzení 4.2.1 (Základní gramatika Z-transformace)**.** *Předpokládejme, že* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$*, přičemž*

$$\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = F(z).$$

Pak platí

(i)

$$\mathscr{Z}\left[\alpha a_n + \beta b_n\right](z) = \alpha \mathscr{Z}\left[a_n\right](z) + \beta \mathscr{Z}\left[b_n\right](z)$$

pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(ii)

$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](=) F\left(\frac{z}{\alpha}\right),$$

pro všechna $\alpha \neq 0$.

(iii)

$$\mathscr{Z}\left[n a_n\right](z) = -zF'(z).$$

Důkaz. (i)

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\left[\alpha a_n + \beta b_n\right](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha a_n + \beta b_n}{z^n} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \\ &= \alpha \mathscr{Z}\left[a_n\right](z) + \beta \mathscr{Z}\left[b_n\right](z).\end{aligned}$$

(ii)

$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n} = F\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

(iii)

$$-zF'(z) = -z\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\right)' = -z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n a_n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n}{z^n} = \mathscr{Z}\left[n a_n\right](z).$$

□

Příklad 4.2.2. Je-li $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pak

$$\mathscr{Z}\left[\alpha + 2\beta^n\right](z) = \mathscr{Z}\left[\alpha\right](z) + 2\mathscr{Z}\left[\beta^n\right](z) = \frac{\alpha z}{z-1} + 2\frac{z}{z-\beta}$$

pro $|z| > \max\{1, |\beta|\}$. ■

Příklad 4.2.3. Jestliže $\omega \in \mathbb{C}$, potom

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\left[\sin(\omega n)\right](z) &= \mathscr{Z}\left[\frac{e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}}{2i}\right](z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}} - \frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\frac{z^2 - ze^{-i\omega} - z^2 + ze^{i\omega}}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}\end{aligned}$$

■

Příklad 4.2.4. Pro $\omega \in \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ máme

$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n \sin(n\omega)\right](z) = \frac{\frac{z}{\alpha}\sin\omega}{\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{z}{\alpha}\cos\omega + 1} = \frac{\alpha z \sin\omega}{z^2 - 2\alpha z\cos\omega + \alpha^2}.$$

■

Příklad 4.2.5.

$$\mathscr{Z}\left[n\right](z) = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

■

Příklad 4.2.6.

$$\mathscr{Z}\left[n^2\right](z) = -z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = -z\frac{(z-1)^2 - z2(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

■

Pomocí postupu z předchozích dvou příkladů můžeme získat obraz posloupnosti generované libovolným polynomem.

Příklad 4.2.7. Pro každé nenulové komplexní číslo α je

$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n n\right](z) = \frac{\frac{z}{\alpha}}{\left(\frac{z}{\alpha}-1\right)^2} = \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}.$$

■

Věta 4.2.8 (Posun vpravo)**.** *Nechť $(a_n)_{n=0}^\infty \in Z_0$ a k je nezáporné celé číslo. Definujme posloupnost $(b_n)_{n=0}^\infty$ vztahem*

$$b_n = \begin{cases} a_{n-k}, & \textit{jestliže } n \geq k, \\ 0, & \textit{jestliže } n < k. \end{cases}$$

Pak

$$\mathscr{Z}\left[b_n\right](z) = \frac{1}{z^k}F(z),$$

kde $F(z)$ je obraz posloupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$.

Důkaz.

$$\mathscr{Z}\left[b_n\right](z) = \frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k+1}} + \frac{a_2}{z^{k+2}} + \cdots = \frac{1}{z^k}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots\right) = \frac{1}{z^k}F(z).$$

□

Příklad 4.2.9. Protože $(1)_{n=0}^\infty \doteq \frac{z}{z-1}$, je

$$(0,0,0,1,1,1,\dots) \doteq \frac{1}{z^3}\frac{z}{z-1}.$$

■

Věta 4.2.10 (posun vlevo)**.** *Předpokládejme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ má Z-obraz $F(z)$ a k je celé nezáporné číslo. Pak*

$$\mathscr{Z}\left[a_{n+k}\right](z) = z^k \left(F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^n}\right).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} z^k \left(F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^n}\right) &= z^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^k}\right) = z^k \left(\frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{z^{k+2}} + \dots\right) \\ &= a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \dots = \mathscr{Z}\left[a_{n+k}\right](z) \end{aligned}$$

□

Příklad 4.2.11. Jestliže $\omega \in \mathbb{C}$, potom

$$\mathscr{Z}\left[\sin\left((n+4)\omega\right)\right](z) = z^5 \left(\frac{z \sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} - \frac{\sin\omega}{z} - \frac{\sin(2\omega)}{z^2} - \frac{\sin(3\omega)}{z^3}\right).$$

■

Příklad 4.2.12. Již dříve jsme nalezli, že

$$\left(n^2\right)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

Odtud

$$\mathscr{Z}\left[(n+3)^2\right](z) = z^3 \left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3} - 0 - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2}\right) = \frac{z^5+z^4}{(z-1)^3} - z^2 - 4z.$$

■

Definice 4.2.13. *Diference* posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost

$$\Delta\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty} = \left(a_{n+1} - a_n\right)_{n=0}^{\infty}.$$

Ať $k \in \mathbb{N}_0$. *Diference řádu k* posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost

$$\Delta^k \left(a_n\right)_{n=0}^{\infty} = \begin{cases} \left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}, & \text{je-li } k = 0, \\ \Delta\Delta^{k-1}\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}, & \text{je-li } k \geq 1. \end{cases}$$

Kromě diference řádu jedna se často vyskytuje diference řádu dva. Napišme si proto její explicitní vyjádření. Z definice plyne, že

$$\begin{aligned} \Delta^2 \left(a_n\right)_{n=0}^{\infty} &= \Delta\left(a_{n+1} - a_n\right)_{n=0}^{\infty} = \left(a_{n+2} - a_{n+1} - \left(a_{n+1} - a_n\right)\right)_{n=0}^{\infty} \\ &= \left(a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n\right)_{n=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

Příklad 4.2.14. Dosazením do definice snadno nalezneme, že

$$\begin{aligned} \Delta\left(n\right)_{n=0}^{\infty} &= \left(1\right)_{n=0}^{\infty}, \\ \Delta^2\left(n\right)_{n=0}^{\infty} &= \left(0\right)_{n=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

■

Tvrzení 4.2.15. *Jestliže posloupnost* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *má* Z*-obraz* $F(z)$ *a* $(b_n)_{n=0}^{\infty} = \Delta (a_n)_{n=0}^{\infty}$*, potom*

$$\mathscr{Z}[b_n](z) = (z-1)F(z) - za_0.$$

Důkaz. Protože $(b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $\mathscr{Z}[a_{n+1}](z) = z[F(z) - a_0]$, je

$$\mathscr{Z}[b_n](z) = \mathscr{Z}[a_{n+1}](z) - \mathscr{Z}[a_n](z) = zF(z) - za_0 - F(z).$$

□

4.3 Konvoluce

Nyní budeme definovat konvoluci dvou posloupností, kterou můžeme chápat jako diskrétní analogii konvoluce dvou integrovatelných funkcí s nosičem v intervalu $[0, \infty)$.

Definice 4.3.1. *Konvoluce* posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost

$$(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty},$$

kde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Vztahy pro prvních pár koeficientů konvoluce $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$ jsou:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0, \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\
c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0.
\end{aligned}$$

Nyní si ilustrujme nový pojem na několika příkladech.

Příklad 4.3.2. Z rovnosti $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$ plyne, že

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = (n+1)_{n=0}^{\infty}.$$

■

Příklad 4.3.3.

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (e^n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1+e, 1+e+e^2, \dots).$$

■

Příklad 4.3.4. Zkoumejme konvoluci obecné posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ s posloupností $(b_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 0, 0, \ldots)$. Protože $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ pro $n = 0$ a $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_n$ pro $n \geq 1$, je

$$(0, 1, 0, 0, \ldots) * (a_0, a_1, a_2, \ldots) = (0, a_0, a_1, \ldots).$$

Vidíme tedy, že výsledná konvoluce odpovídá posunu v posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ o jednu pozici doprava. ■

Podobně jako v případě integrálních transformací i Z-transformace převádí konvoluci na součin.

Věta 4.3.5 (Obraz konvoluce)**.** *Předpokládejme, že* $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$. *Pak*

$$\mathscr{Z}[c_n](z) = \mathscr{Z}[a_n](z)\, \mathscr{Z}[b_n](z).$$

Důkaz. Vyjdeme-li z pravé strany dokazované rovnosti, dostaneme

$$\mathscr{Z}[a_n](z)\, \mathscr{Z}[b_n](z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{z^l} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) \frac{1}{z^n} = \mathscr{Z}[c_n](z)$$

□

Jedním z důsledků věty o konvoluci je skutečnost, že konvolutivní součin je komutativní, asociativní a má jednotkový prvek. To vyplývá ze stejných vlastností obyčejného součinu.

Příklad 4.3.6.

$$(n+1)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} \doteq \left(\frac{z}{z-1} \right)^2$$

■

Příklad 4.3.7.

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (e^n)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-e} = \frac{z^2}{(z-1)(z-e)}.$$

■

Příklad 4.3.8. Určeme posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pro kterou platí

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (2^n)_{n=0}^{\infty} = (4^n)_{n=0}^{\infty}.$$

Aplikací Z-transformace na požadovanou rovnost dostaneme

$$\mathscr{Z}[a_n](z) \frac{z}{z-2} = \frac{z}{z-4}.$$

Odtud

$$\mathscr{Z}[a_n](z) = \frac{z-2}{z-4} = 1 + \frac{2}{z-4} \doteq \left(\delta_{n0} + 2 \cdot \mathbf{1}(n-1) 4^{n-1} \right)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 8, 32, \ldots).$$

■

Příklad 4.3.9. Pokusme se určit posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tak, aby

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$$

pro všechny posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.

Z věty o obrazu konvoluce máme

$$\mathscr{Z}[a_n](z)\,\mathscr{Z}[b_n](z) = \mathscr{Z}[b_n](z)$$

pro všechny posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$. Díky tomu je

$$\mathscr{Z}[a_n](z) = 1,$$

a proto

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 0, \dots).$$

■

Nyní se podívejme na význam konvoluce. Představme si systém daný černou skříňkou, který transformuje vstupní diskrétní signál na výstupní. Předpokládejme, že tato transformace L má následující vlastnosti:

(i) $L : Z_0 \to Z_0$, vstup $\mapsto$ výstup.

(ii) L je translačně invariantní, tj. jestliže $L\,(a_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$, pak

$$L\left(\mathbf{1}(n-k)a_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty} = \left(\mathbf{1}(n-k)b_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty}.$$

(iii) L zachovává (obecně nekonečné) lineární superpozice signálů, tj.

$$L(c_1\,(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2\,(b_n)_{n=0}^{\infty} + \cdots) = c_1 L\,(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2 L\,(b_n)_{n=0}^{\infty} + \dots$$

Zkusme si takovouto transformaci popsat. Předpokládejme, že

$$L(1, 0, \dots) = (b_0, b_1, \dots).$$

Tedy $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je odezvou na jednotkový signál v čase nula (pípnutí v nule). Vstup si můžeme napsat jako nekonečnou superpozici

$$a_0(1, 0, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, 0, \dots) + \dots$$

Pro výstup pak máme

$$\begin{aligned} L\,(a_n)_{n=0}^{\infty} &= a_0(b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) + a_1(0, b_0, b_1, b_2, \dots) + a_3(0, 0, b_0, b_1, \dots) + \dots \\ &= (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots) \end{aligned}$$

Závěrem tedy konstatujeme, že odezva na vstup $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * L(1, 0, 0, \dots),$$

nebo-li

$$L\,(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * L(1, 0, 0, \dots).$$

Chování černé skříňky je tedy popsáno konvolucí vstupního signálu s odezvou na jednotkový signál v nule.

Následující pravidlo umožní transformovat částečné součty dané posloupnosti.

Tvrzení 4.3.10. *Je-li* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = F(z)$, *pak*

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\right](z) = \frac{zF(z)}{z-1}.$$

Důkaz.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1}F(z).$$

□

Příklad 4.3.11.

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} k\right](z) = \frac{z}{z-1}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

■

4.4 Inverzní Z-transformace

Definice 4.4.1. *Inverzní Z-transformace* je zobrazení

$$\mathscr{Z}^{-1} : K_0 \to Z_0$$

takové, že funkci $F \in K_0$ přiřadí posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$.

Z definice okamžitě vidíme, že inverzní Z-transformace je inverzní zobrazení k Z-transformaci.

Při výpočtu inverzní Z-transformace můžeme využít některou z následujících metod:

(i) Přímý rozvoj v Laurentovu řadu.

(ii) Integrální vyjádření, tj. reprezentace členů posloupnosti pomocí křivkového integrálu.

(iii) Přímé vzorce.

Podívejme se na uvedené tři metody podrobněji. Začněme s přímým rozvojem do Laurentovy řady. Zde se snažíme najít rozvoj funkce F na jistém okolí nekonečna. Koeficienty tohoto rozvoje jsou pak členy hledané posloupnosti.

Druhá metoda je založena na integrálním vyjádření členů hledané posloupnosti. Chápeme-li řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ jako Laurentovu řadu se středem v nule, máme podle integrálního vyjádření koeficientů Laurentovy řady vztah

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z^{-n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku, ležící v oblasti, na které je obraz holomorfní. Jsou-li splněny předpoklady reziduové věty, pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = \sum_{z_i} \operatorname{res}_{z_i}\left(F(z)z^{n-1}\right),$$

kde z_i jsou singularity funkce $F(z)z^{n-1}$ ležící uvnitř křivky C.

Poslední metoda využívá přímé vzorce. Ty jsou výhodné zejména v případě, chceme-li spočíst několik počátečních členů posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Snadno nalezneme z rozvoje funkce F fo Laurentovy řady, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = \lim_{z\to\infty} z^n \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^k} \right)$$

Speciálně $a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$ a $a_1 = \lim_{z\to\infty} z\,(F(z) - a_0)$.

Ukažme si použití uvedených metod na sérii příkladů.

Příklad 4.4.2. Uvažujme funkci

$$F(z) = \sin \frac{1}{z}.$$

Využitím standardního rozvoje dostaneme

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

Odtud plyne, že inverzní Z-transformace funkce F je posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž členy jsou

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 0, & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

■

Příklad 4.4.3. Nalezněme inverzní Z-transformaci $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-e)}.$$

Jediné singularity funkce $z^{n-1}F(z)$ jsou pro $n \geq 1$ jednoduché póly v bodech 1 a e. Pro $n = 0$ má navíc funkce $z^{n-1}F(z)$ jednoduchý pól v 0. (Za integrační křivku můžeme zvolit například kladně orientovanou kružnici se středem v počátku a poloměrem větším než e.) Abychom se ale vyhnuli počítání rezidua v 0, využijeme pro nalezení a_0 vzorec s limitou v nekonečnu. To vede na

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z) = 0.$$

Zbylé členy dopočítáme pomocí reziduí. Pro $n \geq 1$ je

$$a_n = \operatorname{res}_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} + \operatorname{res}_e \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} = \frac{1}{1-e} + \frac{e^{n-1}}{e-1} = \frac{1-e^{n-1}}{1-e}.$$

Tedy

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{1-e}(0, 0, 1-e, 1-e^2, \dots).$$

Pro srovnání si uveďme ještě alternativní postup. Rozkladem funkce $F(z)$ na částečné zlomky dostaneme

$$F(z) = \frac{1}{1-e}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e}\right).$$

Nyní stačí buď přímočaře nalézt rozvoje jednotlivých částečných zlomků, nebo můžeme využít známých obrazů a věty o posunu vpravo. Zvolíme si druhou možnost. Máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\frac{z}{z-1} \doteq (0, 1, 1, \ldots), \\ \frac{1}{z-e} &= \frac{1}{z}\frac{z}{z-e} \doteq (0, 1, e, e^2, \ldots). \end{aligned}$$

Z linearity inverzní Z-transformace tak docházíme k výsledku

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{1-e}(0, 0, 1-e, 1-e^2, \ldots).$$

■

Příklad 4.4.4. Je dána funkce

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

Hledejme její inverzní Z-transformaci $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Pro $n = 0$ je

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z) = 0.$$

Je-li $n \geq 1$, pak

$$a_n = \operatorname{res}_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{d}z^{n-1}}{\mathrm{d}z} = n-1.$$

■

Příklad 4.4.5. Využitím Z-transformace se pokusme nalézt součet konečné řady

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2,$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Připomeňme si, že

$$\left(n^2\right)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

Proto

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1}\frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4}.$$

Součet řady pro jednotlivá n dostaneme určením inverzní Z-transformaci k této funkci. Protože $\frac{z^3+z^2}{(z-1)^4} z^{n-1}$ má čtyřnásobný pól v bodě 1 pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (a odstranitelnou singularitu v 0 pro $n = 0$), je

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \operatorname{res}_1 \frac{z^3 + z^2}{(z-1)^4} z^{n-1} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{3!} (z^{n+2} + z^{n+1})''' \\ &= \frac{1}{3!}[(n+2)(n+1)n + (n+1)n(n-1)] = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. ■

4.5 Diferenční rovnice

Diferenční rovnice vznikají přirozeně v teorii signálů, numerickém řešením parciálních diferenciálních rovnic a při popisu diskrétních dynamických systémů. Mají podobnou strukturu jako rovnice diferenciální. Řešení těchto rovnic pomocí Z-transformace je diskrétní analogie řešení diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami pomocí Laplaceovy transformace. Postup si vysvětlíme na příkladech.

Příklad 4.5.1. Uvažujme homogenní diferenční rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$$

spolu s počátečními podmínkami

$$y_0 = y_1 = 1.$$

Označme $\mathscr{Z}[y_n](z) = Y(z)$. Podle věty o posunu vlevo je

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[y_{n+1}](z) &= z[Y(z) - y_0] = z(Y(z) - 1), \\ \mathscr{Z}[y_{n+2}](z) &= z^2 \left[Y(z) - y_0 - \frac{y_1}{z}\right] = z^2 Y(z) - z^2 - z.\end{aligned}$$

Aplikujeme-li tedy Z-transformaci na zadanou rovnici, dostaneme

$$z^2 Y(z) - z^2 - z + 2zY(z) - 2z + Y(z) = 0.$$

Odtud

$$Y(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2}.$$

Výpočtem inverzní Z-transformace tak pro $n \geq 1$ získáme

$$\begin{aligned}y_n &= \operatorname{res}_{-1} \frac{(z^2 + 3z) z^{n-1}}{(z+1)^2} = \lim_{z \to -1} (n+1) z^n + 3n z^{n-1} \\ &= (n+1)(-1)^n + 3n(-1)^{n-1} = (-1)^n (1 - 2n).\end{aligned}$$

Člen y_0 známe z počátečních podmínek. Celkem tak máme

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, -3, 5, \dots).$$

■

Příklad 4.5.2. Uvažme diferenční rovnici

$$y_{n+2} = \frac{10}{3} y_{n+1} - y_n,$$

spolu s počátečními podmínkami

$$y_0 = 1, y_1 = \frac{1}{3}.$$

Využitím Z-transformace obdržíme

$$z^2 \left[Y(z) - 1 - \frac{1}{3z} \right] = \frac{10}{3} z \left[Y(z) - 1 \right] - Y(z),$$

kde $Y(z) = \mathscr{Z}\left[y_n\right](z)$. Odtud

$$Y(z) = \frac{z^2 - 3z}{(z-3)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \doteq \left(\frac{1}{3^n} \right)_{n=0}^{\infty}.$$

■

Příklad 4.5.3 (Fibonancciho čísla)**.** Italský matematik Fibonanci zadal v roce 1212 v pojednání Liber Abaci následující úlohu o populaci králíků. Na začátku máme jeden pár králíku. Každý pár se zreprodukuje vždy po dvou měsících. Kolik bude párů po dvanácti měsících, za předpokladu, že žádný králík nikdy neuhyne?

Zobecněme si tuto otázku a ptejme se, jaký bude počet párů v měsíci s pořadovým číslem $n \in \mathbb{N}_0$. Elementární výpočet umožní generovat počty párů v jednotlivých měsících:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Jak ale vypadá obecný n-tý člen této posloupnosti? Ať y_n označuje počet párů v měsíci n. V měsíci s pořadovým číslem $n+2$ je počet králíků roven počtu nových párů (kterých musí být stejně jako párů v měsíci n), ke kterým musíme přičíst počet již existujících párů z předchozího měsíce (tj. párů z měsíce $n+1$). Tedy členy posloupnosti $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ se řídí rekurentním vztahem

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n.$$

Počáteční podmínky jsou

$$y_0 = y_1 = 1.$$

Aplikací Z-transformace na uvedenou diferenční rovnici dostaneme

$$z^2 \left[Y(z) - 1 - \frac{1}{z} \right] = z[Y(z) - 1] + Y(z),$$

kde $Y(z) = \mathscr{Z}\left[y_n\right](z)$. Proto

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

Inverzi můžeme mimo jiné spočítat rozkladem na částečné zlomky. Protože

$$z\frac{z}{z^2-z-1}=z\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{z}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{z}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right),$$

je

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Je zajímavé, že řešení $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ je kombinací dvou geometrických posloupností, z nichž jedna v nekonečnu diverguje. Pro velké n bude poměr po sobě jdoucích členů téměř konstantní. Konkrétně platí, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,61803.$$

Tento poměr souvisí s poměrem zlatého řezu. ■

Příklad 4.5.4. Je dána diferenční rovnice

$$\Delta^2 y_n+y_n=0$$

s počátečními podmínkami

$$y_0=1, \Delta y_0=0.$$

Protože

$$\begin{aligned}\Delta\,(y_n)_{n=0}^{\infty}&\doteq(z-1)\,Y(z)-z,\\ \Delta^2\,(y_n)_{n=0}^{\infty}&=(z-1)[(z-1)Y(z)-z]-0=(z-1)^2Y(z)-z(z-1),\end{aligned}$$

kde $Y(z)=\mathscr{Z}\,[y_n]\,(z)$, je

$$\left[(z-1)^2+1\right]Y(z)=z(z-1).$$

Díky tomu je

$$\begin{aligned}Y(z)&=\frac{z(z-1)}{(z-1)^2+1}=\frac{z^2-z}{z^2-2z+2}=z\frac{z-1}{(z-1-i)(z-1+i)}\\ &=z\left(\frac{A}{z-1-i}+\frac{B}{z-1+i}\right)=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{z-1-i}+\frac{1}{z-1+i}\right).\end{aligned}$$

Odtud

$$y_n=\frac{1}{2}\left[(1+i)^n+(1-i)^n\right]=\operatorname{Re}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

■

Příklad 4.5.5. Je dána diferenční rovnice

$$\Delta^2 y_n = 2$$

s počátečními podmínkami

$$y_0 = 0, \Delta y_0 = 1.$$

Z-transformace zadané rovnice vede na

$$Y(z)(z-1)^2 = 2\frac{z}{z-1} + z,$$

kde $Y(z) = \mathscr{Z}\left[y_n\right](z)$. Tedy

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Výpočtem inverzní Z-transformace dostaneme, že

$$\operatorname{res}_1 \frac{z^n}{(z-1)^3} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}(z^n)'' = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$y_n = \operatorname{res}_1 \frac{2z^n}{(z-1)^3} + n = \lim_{z\to 1}(z^n)'' + n = n(n-1) + n = n^2$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. ■

Příklad 4.5.6. Nalezněme řešení diferenční rovnice s konvolučním jádrem

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k} = 1,$$

které vyhovuje počátečním podmínkám $y_0 = y_1 = 0$.

Suma $\sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k}$ je n-tý člen posloupnosti $(2^n)_{n=0}^{\infty} * (y_n)_{n=0}^{\infty}$. Proto

$$z^2 Y(z) + \frac{z}{z-2}Y(z) = \frac{z}{z-1},$$

kde $Y(z) = \mathscr{Z}\left[y_n\right](z)$. Obraz řešení tedy je

$$Y(z) = \frac{z-2}{(z-1)^3}.$$

Pro $n \geq 1$ je tak

$$\begin{aligned} y_n &= \operatorname{res}_1 \frac{(z-2)z^{n-1}}{(z-1)^3} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}\left(z^n - 2z^{n-1}\right)'' = \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1)(n-2) \\ &= (n-1)\left[2 - \frac{n}{2}\right]. \end{aligned}$$

Člen y_0 známe z počátečních podmínek. ■

Příklad 4.5.7. V závislosti na posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ze Z_0 nalezněme řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} - 2y_n = a_n$$

vyhovující počáteční podmínce $y_0 = 0$.

Transformací obou stran rovnice obdržíme

$$zY(z) - 2Y(z) = F(z),$$

kde $F(z) = \mathscr{Z}[a_n](z)$ a $Y(z) = \mathscr{Z}[y_n](z)$. Obraz řešení má tak tvar

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z-2} \doteq \left(\mathbf{1}(n-1)2^{n-1}\right)_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Protože součin obrazů odpovídá konvoluci vzorů, je

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\mathbf{1}(n-1)2^{n-1}\right)_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Pro $n \geq 1$ máme

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{n-k}.$$

■

Příklad 4.5.8. Pro obecnou pravou stranu $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ řešme rovnici

$$y_{n+3} + y_n = a_n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = y_1 = y_2 = 0$.

Využitím Z-transformace na zadanou rovnici získáme

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z^3+1},$$

kde $F(z) = \mathscr{Z}[a_n](z)$ a $Y(z) = \mathscr{Z}[y_n](z)$. Protože

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{z^3}\frac{1}{1+\frac{1}{z^3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{3(n+1)}},$$

je

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty},$$

kde

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-3}{3}}, & n \in \{3k+3 \mid k \in \mathbb{N}_0\}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

■

Příklad 4.5.9. Pomocí řešení diferenční rovnice určeme součet

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}.$$

Označme hledaný součet jako

$$y_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}.$$

Členy posloupnosti $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ musí splňovat diferenční rovnici

$$y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

s počáteční podmínkou $y_0 = 0$. Protože

$$\mathscr{Z}\left[\frac{n}{2^n}\right](z) = \frac{2z}{(2z-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2},$$

je

$$\mathscr{Z}\left[\frac{n+1}{2^{n+1}}\right](z) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Funkce $\mathscr{Z}[y_n](z) = Y(z)$ tak musí splňovat rovnici

$$zY(z) - Y(z) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Proto

$$Y(z) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Součet y_n pro $n \geq 1$ (y_0 známe z počáteční podmínky) nalezneme pomocí reziduí. Ať $n \geq 1$. Funkce $Y(z)z^{n-1}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. V bodě $\frac{1}{2}$ má jednoduchý pól a v bodě 1 má dvojnásobný pól. Protože

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_1 \frac{1}{2}\frac{z^{n+1}}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2,\\
\operatorname{res}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\frac{z^{n+1}}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} &= \frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\frac{z^{n+1}}{z-1}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{(n+1)z^n(z-1) - z^{n+1}}{(z-1)^2}\\
&= 2\left[\frac{n+1}{2^n}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = -\frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n},
\end{aligned}$$

je

$$y_n = 2 - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

■