1 Cvičení 1

1.1 Ukažte, že pro každé dvě množiny A, B platí

1. $A \subseteq B$ právě tehdy, když $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.
2. $A \subseteq B$ právě tehdy, když $A \cup B = B$.
3. $A \subseteq B$ právě tehdy, když $A \cap B = A$.

1.2 Ukažte, že pro každé tři množiny A, B, C platí

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.3 Ukažte, že pro každé tři množiny A, B, C platí *Jestliže $A \subseteq B$, tak $C \times A \subseteq C \times B$.*

1.4 Určete podmínky, které musí splňovat množiny A, B a C, aby platilo

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

1.5 Je dáno zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & \text{pro } n \text{ dělitelné 3;} \\ 2n+1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda zobrazení f je prosté a zda je na.

1.6 Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá nebo ne. V případě, že některé tvrzení neplatí, najděte protipříklad.

1. Není-li f prosté, pak ani $g \circ f$ není prosté (za předpokladu, že $g \circ f$ je definované pro alespoň jeden argument).
2. Není-li f na, pak ani $g \circ f$ není na (za předpokladu, že $g \circ f$ je definované pro alespoň jeden argument).
3. Není-li f prosté, pak ani $f \circ g$ není prosté (za předpokladu, že $g \circ f$ je definované pro alespoň jeden argument).
4. Není-li f na, pak ani $f \circ g$ není na (za předpokladu, že $g \circ f$ je definované pro alespoň jeden argument).

1.7 Jsou následující množiny spočetné nebo nespočetné?

1. množina všech binárních slov neobsahujících 1;
2. množina všech reálných čísel mezi 0 a 1, které v desetinném rozvoji neobsahují 1;
3. množina všech přímek procházejících počátkem;
4. množina všech trojúhelníků, jejichž vrcholy mají celočíselné souřadnice.

1.8 Ukažte, že každé dva neprázdné otevřené intervaly reálných čísel mají stejnou mohutnost.

1.9 Ukažte, že množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ má stejnou mohutnost jako interval $(0, \infty)$.