

6 Cvičení 6

6.1 V $(\mathbb{Z}_{148}, +, \cdot)$ je dána parametrická rovnice s parametrem p

$$px - 5^{509} = 9(x + 11).$$

1. Určete počet parametrů $p \in \mathbb{Z}_{148}$ pro které má výše uvedená rovnice přesně jedno řešení. Odpověď pečlivě zdůvodněte.
2. Pro čtyři parametry p , pro které má rovnice přesně jedno řešení, rovnici vyřešte.

6.2 Na množině reálných čísel \mathbb{R} je dána operace \circ předpisem.

$$x \circ y = \frac{x + y}{2}.$$

Rozhodněte, zda (\mathbb{R}, \circ) je pologrupa.

6.3 Na neprázdné množině A je dána operace \circ předpisem.

$$x \circ y = x \quad \text{pro každé } x, y \in A.$$

Rozhodněte, zda (A, \circ) je pologrupa a zda má neutrální prvek.

6.4 Na množině přirozených čísel \mathbb{N} jsou dány operace $*_l$ a $*_g$ předpisem

$$n *_g m = \gcd(n, m), \quad \text{a } n *_l m = \text{lcm}(n, m).$$

Rozhodněte, zda $(\mathbb{N}, *_g)$ a $(\mathbb{N}, *_l)$ jsou pologrupy a zda má í neutrální prvek. V případě, že ano, neutrální prvek najděte.

6.5 Na množině $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ je dána operace \star předpisem

$$x \star y = \frac{1}{3}xy.$$

Ukažte, že (A, \star) je grupa. Najděte podmnožinu $B \subset A$, takovou že (B, \star) je podpogrupa grupy (A, \star) , která je grupa a navíc $|B| \geq 4$.

6.6 Na množině $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ je dána operace \circ předpisem

$$x \circ y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Rozhodněte, zda (A, \circ) je pologrupa a zda má neutrální prvek.