7 Cvičení 7

7.1 Uvažujme množinu $\mathcal{M}$, která se skládá za všech čtvercových matic

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

kde a, b, c jsou celá čísla.

a) Ukažte, že operace násobení matic je biární operace na množině $\mathcal{M}$.

b) Tvoří $\mathcal{M}$ spolu s násobením matic pologrupu? Zdůvodněte.

c) Ukažte, že $(\mathcal{M}, \cdot)$ má jednotkový prvek.

d) Najděte všechny prvky, které jsou invertibilní prvky $(\mathcal{M}, \cdot)$. Je tedy $(\mathcal{M}, \cdot)$ grupa?

7.2 Uvažujme množinu A, která se skládá za všech reálných funkcí $f(x) = ax + b$, kde $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ spolu s operací skládání funkcí $\circ$.

Ukažte, že $(A, \circ)$ je pologrupa (platnost asociativního zákona dokazovat nemusíte, je ale třeba dokázat, že skládání je binární operace na množině A).

Určete neutrální prvek pologrupy $(A, \circ)$ a rozhodněte, zda $(A, \circ)$ je grupa.

7.3 Je dána grupa $(\mathbb{Z}_{13}^\star, \cdot, 1)$. Najděte generátor této grupy, jestliže existuje. Jestliže generátor existuje, určete počet různých generátorů.

(Generátor je prvek grupy, jehož mocněním dostaneme každý prvek grupy.)

Určete řády všech prvků $(\mathbb{Z}_{13}^\star, \cdot, 1)$.

Existuje podgrupa grupy $(\mathbb{Z}_{13}^\star, \cdot, 1)$, která má 4 prvky? Jestliže ano, najděte ji, jestliže ne, zdůvodněte, proč neexistuje.

7.4 V $\mathbb{Z}_{11}$ je dána rovnice s parametrem t

$$3^{159}x + 7 = tx + 1.$$

Pro které parametry t má rovnice právě jedno řešení? Rovnici vyřešte pro $t = 9$.

7.5 Na polotevřeném intervalu $< 1, 5)$ je dána operace $*$ předpisem:

$$a * b = a \cdot b \quad \text{pro } a \cdot b < 5,$$

$$a * b = \frac{1}{5} a \cdot b \quad \text{pro } a \cdot b \geq 5.$$

Rozhodněte, zda je komutativní grupa.