

## 8 Cvičení 8

**8.1** Na polotevřeném intervalu  $(1, 5)$  je dána operace  $*$  předpisem:

$$a * b = a \cdot b \quad \text{pro } a \cdot b < 5,$$

$$a * b = \frac{1}{5} a \cdot b \quad \text{pro } a \cdot b \geq 5.$$

Rozhodněte, zda je komutativní grupa.

**8.2** Jsou dány dva polynomy  $f(x) = x^6 + x^3 + x^2 + 1$  a  $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$  nad  $\mathbb{Z}_2$ . Najděte částečný podíl a zbytek při dělení polynomu  $f(x)$  polynomem  $g(x)$ .

**8.3** Jsou dány dva polynomy  $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$  a  $g(x) = x + 1$  nad  $\mathbb{Z}_2$ . Najděte částečný podíl a zbytek při dělení polynomu  $f(x)$  polynomem  $g(x)$ .

**8.4** Napište všechny ireducibilní polynomy nad  $\mathbb{Z}_2$  pátého stupně.

**8.5** Rozložte v součin ireducibilních polynomů polynom  $f(x) = x^7 + x$  nad  $\mathbb{Z}_2$ .

**8.6** V  $\mathbb{Z}_2[x]/\text{mod}(x^3 + x + 1)$  ukažte, že grupa všech nenulových prvků je cyklická s generátorem  $\alpha = x$ . Napište všechny nenulové prvky jako mocniny tohoto generátoru.

S pomocí generátoru spočítejte

$$(x^2 + x + 1)^2 \cdot (x + 1)^{-3}$$

v  $\mathbb{Z}_2/\text{mod}(x^3 + x + 1)$ .