2.1.27 V minulé přednášce jsme si uvedli pojem redukovaného automatu. Připomeňme

Definice. Je dán DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Řekneme, že M je *redukovaný*, jestliže nemá nedosažitelné stavy a žádné jeho dva různé stavy nejsou ekvivalentní. □

Jinými slovy, jestliže ekvivalence $\sim$ je identická ekvivalence na množině stavů Q.

2.1.28 Konstrukce ekvivalence $\sim$. Na množině všech stavů Q postupně konstruujeme ekvivalence $\sim_i$, kde $i = 0, 1, \ldots$, takto:

a) $p \sim_0 q$ právě tehdy, když buď $p, q \in F$ nebo $p, q \notin F$.
b) Dokud $\sim_{i+1} \neq \sim_i$ konstruujeme $\sim_{i+1}$ takto
$p \sim_{i+1} q$ právě tehdy, když $p \sim_i q$ a pro každé $a \in \Sigma$ máme $\delta(p, a) \sim_i \delta(q, a)$.
c) Položíme $\sim := \sim_i$ pro $\sim_{i+1} = \sim_i$.

Správnost tohoto postupu vyplyne z následujících dvou tvrzení.

2.1.29 Tvrzení. Platí

$$\sim_0 \supseteq \sim_1 \supseteq \ldots \supseteq \sim_i \supseteq \ldots$$

Navíc, existuje k takové, že $\sim_k$ je rovna $\sim_{k+1}$. Pak pro každé $j \geq 1$ platí $\sim_k = \sim_{k+j}$. □

Důkaz. Z postupu je vidět, že ekvivalence postupně stále zjemňujeme, proto musíme po konečně mnoha krocích se zjemňováním skončit – nejjemnější ekvivalence je identická ekvivalence. Existuje tedy k takové, že $\sim_k$ je rovna $\sim_{k+1}$.

Jednoduchou matematickou indukcí s použitím definice relace $\sim_{k+1}$ se dokáže, že jestliže $\sim_k$ je rovna $\sim_{k+1}$, pak $\sim_k$ je rovna $\sim_{k+j}$ pro každé $j \geq 1$.

2.1.30 Tvrzení. Pro relace $\sim_i$ z 2.1.28 platí $p \sim_i q$ právě tehdy, když pro každé slovo u délky menší nebo rovné i je $\delta^\star(p, u) \in F$ iff $\delta^\star(q, u) \in F$. □

Důkaz vyplývá z konstrukce ekvivalencí $\sim_i$ za použití matematické indukce.

Základní krok: Jediné slovo, které má délku $i \leq 0$, je prázdné slovo ε. Dále platí $\delta^\star(q, \varepsilon) = q$, $\delta^\star(p, \varepsilon) = p$; proto tvrzení vyplývá z definice relace $\sim_0$.

Indukční krok: Mějme stavy p, q. Předpokládejme, že platí: $p \sim_i q$ právě tehdy, když pro každé slovo u s $|u| \leq i$ máme $\delta^\star(p, u) \in F$ iff $\delta^\star(q, u) \in F$.

Musíme ukázat dvě implikace. Nejprve předpokládejme, že $p \sim_{i+1} q$. Uvažujme libovolné slovo w s $|w| \leq i + 1$. Jestliže $|w| \leq i$, pak tvrzení vyplývá z indukčního předpokladu (víme, že $p \sim_i q$). Zvolme w s $|w| = i + 1$, tj. $w = au$ pro $|u| = i$. Máme $\delta^\star(p, w) = \delta^\star(\delta(p, a), u)$ a také $\delta^\star(q, w) = \delta^\star(\delta(q, a), u)$. Z definice relace $\sim_{i+1}$ víme, že platí i $\delta(p, a) \sim_i \delta(q, a)$. Proto z indukčního předpokladu (protože $|u| = i$) platí $\delta^\star(p, w) \in F$ právě tehdy, když $\delta^\star(q, w) \in F$.

Předpokládejme, že pro každé w s $|w| \leq i+1$ platí $\delta^\star(p, w) \in F$ právě tehdy, když $\delta^\star(q, w) \in F$. Pak z indukčního předpokladu víme, že $p \sim_i q$ (ano, všechna slova délky nejvýše i jsou také slova délky nejvýše $i + 1$). Kdyby nemělo platit $\delta(p, a) \sim_i \delta(q, a)$ pro nějaké $a \in \Sigma$, muselo by existovat slovo v s $|v| \leq i$ takové, že jeden ze stavů $\delta^\star(\delta(p, a), v)$ a $\delta^\star(\delta(q, a), v)$ patří do F a druhý do F nepatří. To ale není možné, neboť $\delta^\star(\delta(p, a), v) = \delta^\star(p, av)$ a $\delta^\star(\delta(q, a), v) = \delta^\star(q, av)$ a $|av| = |v| + 1 \leq i + 1$. Proto $p \sim_{i+1} q$.

Poznámka. Ekvivalence $\sim_i$ v praxi konstruujeme tak, že konstruujeme odpovídající rozklady R_i množiny stavů Q na třídy ekvivalence $\sim_i$.

2.1.31 Algoritmus redukce. Slovně můžeme redukovaný automat M_1, který konstruujeme, popsat takto: za stavy vezmeme třídy ekvivalence $\sim$; počáteční stav je třída, ve které leží původní počáteční stav q_0; přechodová funkce „pracuje" na třídách (což je možné vzhledem k vlastnosti ekvivalence $\sim$), a množina koncových stavů je množina těch tříd, ve kterých leží alespoň jeden koncový stav původního automatu.

Formálněji: Je dán DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

1. Zkonstruujeme množinu Q' všech dosažitelných stavů automatu M podle postupu 2.1.24, tím dostanete automat $M' = (Q', \Sigma, \delta, q_0, F \cap Q')$.
2. Podle 2.1.28 zkonstruujeme rozklady R_i ekvivalencí $\sim_i$ pro DFA M'. Končíme tehdy, když $\sim_i = \sim_{i+1}$. Pložíme $\sim = \sim_i$.
3. Označme $[q]_\sim$ třídu ekvivalence $\sim$ obsahující stav q. Vytvoříme DFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, kde
   - $Q_1 := \{[q]_\sim\, ;\, q \in Q'\}$ (tj. stavy M_1 jsou třídy ekvivalence $\sim$),
   - $q_1 := [q_0]_\sim$ (tj. počáteční stav je třída obsahující q_0),
   - $\delta_1([q]_\sim, a) = [\delta(q,a)]_\sim$,
   - $F_1 = \{[q]_\sim\, ;\, F \cap [q]_\sim \neq \emptyset\}$.

□

2.1.32 Příklad. K DFA automatu M, který je dán následující tabulkou, najděte redukovaný automat M_1.

		a	b
$\rightarrow$	1	2	3
	2	2	4
$\leftarrow$	3	3	5
	4	2	7
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	6	6
	7	7	4
	8	2	3
$\leftarrow$	9	9	4

Řešení. Nejprve najdeme všechny dosažitelné stavy automatu M. Jsou to stavy $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Tedy $Q' = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $F' = \{3,5,6\}$.

Automat M' je dán tabulkou:

		a	b
$\rightarrow$	1	2	3
	2	2	4
$\leftarrow$	3	3	5
	4	2	7
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	6	6
	7	7	4

Podle definice ekvivalence $\sim_0$ je rozklad R_0 tvořen dvěma třídami:

$$O = \{1,2,4,7\} \quad F = \{3,5,6\}.$$

Platí

$$\delta(1,a) = 2,\ \delta(2,a) = 2,\ \delta(4,a) = 2,\ \delta(7,a) = 7,$$

tj. všechny výsledky leží ve třídě O.

$$\delta(1,b) = 3,\ \delta(2,b) = 4,\ \delta(4,b) = 7,\ \delta(7,b) = 4,$$

tj. $\delta(1,b) \in F$ a $\delta(2,b), \delta(4,b), \delta(7,b) \in O$. Proto musíme množinu O rozdělit na dvě podmnožiny: $\{1\}$ a $\{2,4,7\}$.

Dále

$$\delta(3,a) = 3 \in F,\ \delta(5,a) = 6 \in F,\ \delta(6,a) = 6 \in F,$$

$$\delta(3,b) = 5 \in F,\ \delta(5,b) = 3 \in F,\ \delta(6,b) = 6 \in F.$$

Proto množinu F nedělíme.

Rozklad odpovídající ekvivalenci $\sim_1$ je

$$A = \{1\},\ O = \{2, 4, 7\},\ F = \{3, 5, 6\}.$$

Výpočet zahrneme do tabulky

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$
$\rightarrow$	1	2	3	O	O	F	A
	2	2	4	O	O	O	O
$\leftarrow$	3	3	5	F	F	F	F
	4	2	7	O	O	O	O
$\leftarrow$	5	6	3	F	F	F	F
$\leftarrow$	6	6	6	F	F	F	F
	7	7	4	O	O	O	O

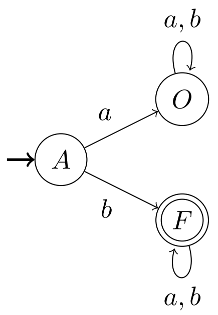
Analogicky vytváříme ekvivalence $\sim_2$. Výpočet již zkrátíme jen do tabulky.

		a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$
$\rightarrow$	1	2	3	O	O	F	A	O	F	A
	2	2	4	O	O	O	O	O	O	O
$\leftarrow$	3	3	5	F	F	F	F	F	F	F
	4	2	7	O	O	O	O	O	O	O
$\leftarrow$	5	6	3	F	F	F	F	F	F	F
$\leftarrow$	6	6	6	F	F	F	F	F	F	F
	7	7	4	O	O	O	O	O	O	O

Z tabulky vyplývá, že $\sim_1 \ = \ \sim_2$. Proto $\sim_1 \ = \ \sim$ je hledaná ekvivalence. Máme tedy tři třídy ekvivalence, a to A, O a F. Redukovaný automat M_1 má tři stavy a je dán tabulkou

		a	b
$\rightarrow$	A	O	F
	O	O	O
$\leftarrow$	F	F	F

Stavový diagram automatu je na následujícím obrázku.



Není těžké nahlédnout, že automat M_1 přijímá všechna slova jazyka $L = \{bu\,;\, u \in \{a, b\}^\star\}$.

2.1.33 Věta. Automat M i k němu redukovaný automat M_1 přijímají stejný jazyk, tj. jsou ekvivalentní. $\square$

Myšlenka důkazu této věty vyplývá z konstrukce redukovaného automatu. Nejprve jsme odstranili nedosažitelné stavy, které se nemohou vyskytnout při přijetí žádného slova. Následně jsme pouze „slepovali“ stavy a to tak, že jestliže jsme se po orientovaném sledu z počátečního stavu označeném slovem u dostali do koncového stavu v původním automatu, tak jsme se v redukovaném automatu z počátečního stavu po sledu označeném stejným slovem dostali také do koncového stavu, a naopak.

Navíc je dobré si uvědomit, že $[q]_\sim \cap F \neq \emptyset$ právě tehdy, když $[q]_\sim \subseteq F$. To vyplývá z faktu, že $\sim$ je zjemnění $\sim_0$.

2.1.34 Isomorfní automaty. Neformálně řečeno, dva konečné automaty jsou isomorfní, jestliže se liší pouze v pojmenování stavů. Přesněji

Definice. Jsou dány DFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ a $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Řekneme, že M_1 a M_2 jsou *isomorfní*, jestliže existuje bijekce φ množiny stavů Q_1 na množinu stavů Q_2 taková, že

- $\varphi(q_1) = q_2$ (počáteční stavy si odpovídají),
- $\varphi(F_1) = F_2$ (koncové stavy si odpovídají),
- $\varphi(\delta_1(q, a)) = \delta_2(\varphi(q), a)$ pro každé $q \in Q_1$ a $a \in \Sigma$ (je jedno, zda nejprve provedete přechodovou funkci a pak stav zobrazíte nebo nejprve stav zobrazíte a pak provedete odpovídající přechodovou funkci). □

2.1.35 Věta. Dva DFA M_1 a M_2 přijímají stejný jazyk (tj. jsou ekvivalentní) právě tehdy, když jejich odpovídající redukované automaty jsou isomorfní.

Myšlenka důkazu. Jestliže jsou redukované automaty k automatům M_1 a M_2 isomorfní, pak jsou automaty M_1 a M_2 ekvivalentní. To vyplývá z věty 2.1.33.

Předpokládejme, že automaty M_1 a M_2 jsou ekvivalentní. Utvořme k nim redukované automaty $\overline{M_1}$ a $\overline{M_2}$; označme $\overline{M_1} = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ a $\overline{M_2} = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Vytvoříme přiřazení φ stavů Q_1 stavům Q_2 takto:

- Počáteční stavy si odpovídají, tj.
$$\varphi(q_1) = q_2.$$
- Protože všechny stavy M_1 jsou dosažitelné (a také všechny stavy M_2 jsou dosažitelné), pro každé $q \in Q_1$ existuje slovo w tak, že $\delta_1^\star(q_1, w) = q$. Položíme
$$\varphi(\delta_1^\star(q_1, w)) = \delta_2^\star(q_2, w).$$
Nyní se stačí přesvědčit, že φ je opravdu bijekce množiny Q_1 na Q_2 splňující všechny vlastnosti z definice isomorfismu.

□

2.2 Nedeterministické konečné automaty

Konečný deterministický automat má tu vlastnost, že v každém stavu reaguje na každé písmeno přesně jedním způsobem (přechodová funkce byla zobrazení z množiny $Q \times \Sigma$ do Q). Nedeterministické automaty se od deterministických liší tím, že jsme-li ve stavu q a čteme vstupní písmeno a, můžeme přejít do několika stavů (a také žádného). V této sekci ukážeme, že ke každému nedeterministickému automatu existuje deterministický konečný automat, který přijímá stejný jazyk. Vzhledem k tomu, že nedeterministické automaty se snáze navrhují, zavedení nedeterministických automatů nám umožní zjednodušit postup při návrhu konečného automatu přijímajícího daný jazyk.

2.2.1 Nedeterministický automat. Shrňme, čím se nedeterministický konečný automat liší od deterministického automatu:

1. NFA může mít víc počátečních stavů, ne jen jeden,
2. každému stavu q a každému vstupnímu písmenu a přiřazuje přechodová funkce δ několik stavů (i žádný stav); tj. $\delta(q, a)$ je množina stavů (třeba i prázdná).

Definice. *Nedeterministický konečný automat*, zkráceně NFA, je pětice $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$, kde

- Q je konečná neprázdná množina stavů,
- Σ je konečná neprázdná množina vstupů,
- δ je přechodová funkce, kde
$$\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q),$$
kde $\mathcal{P}(Q)$ je množina všech podmnožin množiny Q.
- $I \subseteq Q$ je konečná neprázdná množina počátečních stavů,
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů. □

2.2.2 Stavový diagram NFA. Obdobně jako pro deterministické automaty můžeme i pro nedeterministické definovat stavový diagram. Rozdíl mezi stavovým diagramem NFA a DFA je jen v tom, že ve stavovém diagramu nedeterministického automatu mohou existovat stavy, ze kterých vychází několik orientovaných hran ohodnocených stejným písmenem i stavy, ze kterých nevychází žádná hrana ohodnocená některým písmenem.

Definice. Je dán nedeterministický automat $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. *Stavový diagram* automatu M je orientovaný ohodnocený graf, jehož množina vrcholů je množina stavů Q, z vrcholu q do vrcholu p vede hrana ohodnocená vstupním symbolem a právě tehdy, když $p \in \delta(q, a)$. Počáteční i koncové stavy jsou označeny stejně jako u stavového diagramu deterministického automatu; tj. do každého počátečního stavu a z každého koncového stavu vede šipka. $\square$

2.2.3 Rozšířená přechodová funkce NFA. Dříve než zadefinujeme rozšířenou přechodovou funkci, zavedeme následující značení. Pro danou množinu stavů $X \subseteq Q$ a $a \in \Sigma$ položíme

$$\delta(X, a) = \bigcup \{\delta(q, a) \,;\, q \in X\}.$$

Definice. Je dán NFA $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$. *Rozšířená přechodová funkce* $\delta^\star \colon Q \times \Sigma^\star \to \mathcal{P}(Q)$ je definovaná induktivně takto:

1. $\delta^\star(q, \varepsilon) = \{q\}$, pro všechna $q \in Q$,
2. $\delta^\star(q, ua) = \delta(\delta^\star(q, u), a)$ pro všechna $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^\star$.

$\square$

2.2.4 Pro lepší pochopení práce nedeterministických automatů uveďme jednoduché pozorování (je analogické pozorování pro DFA).

Pozorování. Je dán NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. Pak pro každý stav q a každé slovo $w \in \Sigma^\star$ jsou následující dvě vlastnosti ekvivalentní:

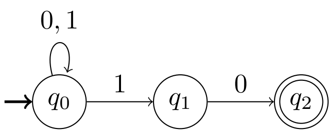
1. Existuje orientovaný sled ve stavovém diagramu z q do p označený slovem w.
2. $p \in \delta^\star(q, w)$.

Jinými slovy: množina $\delta^\star(p, w)$ je množina všech stavů p, do kterých vede orientovaný sled z vrcholu p ohodnocený slovem w. $\square$

2.2.5 Příklad. Je dán NFA tabulkou

	0	1
$\rightarrow\ q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\leftarrow\ q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

se stavovým diagramem



Rozšířená přechodová funkce $\delta^\star$ pracuje nad slovem 0110 takto:

1. $\delta^\star(q_0, 0) = \{q_0\}$;
2. $\delta^\star(q_0, 01) = \delta(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$;
3. $\delta^\star(q_0, 011) = \delta(\{q_0\}, 1) \cup \delta(\{q_1\}, 1) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$;
4. $\delta^\star(q_0, 0110) = \delta(\{q_0\}, 0) \cup \delta(\{q_1\}, 0) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$.

2.2.6 Slovo přijímané NFA, jazyk přijímaný NFA. Neformálně řečeno slovo w je přijímáno NFA právě tehdy, když ve stavovém diagramu existuje orientovaný sled označený slovem w, který začíná v některém z počátečních stavů automatu a končí v některém z koncových stavů. Jazyk se pak skládá ze všech slov, které NFA přijímá. Formálně

Definice. Řekneme, že NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ *přijímá* slovo $w \in \Sigma^\star$ jestliže $\delta^\star(I, w) \cap F \neq \emptyset$; jinými slovy pro nějaký z počátečních stavů $q_0 \in I$ platí $\delta^\star(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$.

Jazyk $L(M)$ *přijímaný* NFA M se skládá z právě všech slov, které jsou přijímány M. □

2.2.7 Každý deterministický automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ můžeme považovat za nedeterministický. Stačí říci, že množina počátečních stavů obsahuje jen q_0 a u přechodové funkce $\delta(q, a) = p$ ztotožnit stav p s jednoprvkovou množinou $\{p\}$. Následující konstrukce, tzv. podmnožinová konstrukce, ukazuje, že nedeterministické automaty přijímají pouze regulární jazyky.

Tvrzení. Ke každému nedeterministickému automatu M existuje deterministický automat $\widehat{M}$, který přijímá stejný jazyk; tj.

$$L(M) = L(\widehat{M}).$$

□

Způsob, kterým se DFA $\widehat{M}$ konstruuje, se nazývá *podmnožinová konstrukce.*

2.2.8 Podmnožinová konstrukce. Je dán nedeterministický automat $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. Definujeme deterministický automat $\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, q_0, \widehat{F})$ takto:

- $\widehat{Q}$ je množina všech podmnožin množiny Q (tj. $\widehat{Q} = \mathcal{P}(Q)$);
- $q_0 = I$;
- $\widehat{F}$ je množina všech těch podmnožin Q, které obsahují aspoň jeden koncový stav M, (tj. $\widehat{F} = \{X \subseteq Q\,;\, X \cap F \neq \emptyset\}$);
- $\widehat{\delta}(X, a)$ je množina všech stavů, do kterých vede hrana označená písmenem a z některého stavu množiny X (tj. $\widehat{\delta}(X, a) = \bigcup\{\delta(q, a)\,;\, q \in X\} = \delta(X, a)$.)

2.2.9 Modifikace podmnožinové konstrukce — hledání pouze dosažitelných stavů. Obdobně jako v 2.1.24 se jedná o modifikaci prohledávání stavového diagramu do šířky. Je dán nedeterministický automat $M = (Q, \Sigma, I, \delta, F)$.

1. $Q := \{I\}$; $A := \{I\}$;
2. `if` $A \neq \emptyset$ `do` $B := \emptyset$;
    `for all` $X \in A$ `do`
        `for all` $a \in \Sigma$ `do` $\widehat{\delta}(X, a) := \delta(X, a)$;
            `if` $\delta(X, a) \notin Q$ `then` $B := B \cup \{\delta(X, a)\}$;
3. `if` $B \neq \emptyset$ `do` $Q := Q \cup B$; $A := B$ `go to 2`
4. $\widehat{q_0} := I$; $\widehat{Q} := Q$; $\widehat{F} := \{X \in \widehat{Q}\,;\, X \cap F \neq \emptyset\}$;
5. `return` $\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{q_0}, \widehat{\delta}, \widehat{F})$

2.2.10 Věta. Jazyk L je přijímán nějakým nedeterministickým automatem právě tehdy, když existuje deterministický automat M_1 takový, že

$$L = L(M_1).$$

□

Jinými slovy, automaty NFA i DFA přijímají stejnou třídu jazyků, a to regulární jazyky.

Myšlenka důkazu: Jedna implikace vyplývá z pozorování 2.2.7.

Druhá implikace vyplývá z podmnožinové konstrukce 2.2.8. Indukcí podle délky slova $u \in \Sigma^\star$ se dá dokázat: Pro každou podmnožinu X a každé slovo $u \in \Sigma^\star$ platí

$$\widehat{\delta}^\star(X, u) = \bigcup\{\delta^\star(q, u)\,;\, q \in X\}.$$

Tedy z definice DFA $\widehat{M}$ dostáváme

$$L(M) = L(\widehat{M}).$$

Proto $\widehat{M}$ vytvořený postupem 2.2.9, tj. podmnožinovou konstrukcí, je hledaný DFA M_1.

2.2.11 Poznámka. Poznamenejme, že počet stavů DFA $\widehat{M}$ z předchozí věty může vzrůst exponenciálně oproti počtu stavů nedeterministického automatu M.