3.2.22 V minulé přednášce jsme si zavedli pojem zásobníkového automatu. Je to, zhruba řečeno, automat, který kromě vstupní pásky a řídící jednotky má ještě zásobník, do kterého může ukládat symboly a tím získá ještě další informaci — „paměť“. Přitom byl zásobníkový automat definován jako nedeterministický; na některé trojice stav, vstup, zásobníkový symbol může reagovat několika přechody, jindy trojice nemá přechod žádný.

Je jasné, že zásobníkové automaty představují rozšíření konečných automatů. Ano, každý DFA, či NFA, či ε-NFA můžeme chápat jako zvláštní případ zásobníkového automatu. Např. pro NFA má zásobníkový automat jediný zásobníkový symbol a to počáteční a při práci se zásobník nemění.

3.2.23 Vztah mezi jazyky generovanými CF gramatikou a jazyky přijímanými zásobníkovými automaty popisují následující věty. První věta říká, že bezkontextové jazyky jsou přijímány zásobníkovými automaty.

Věta. Ke každé bezkontextové gramatice $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ existuje zásobníkový automat A takový, že
$$L(\mathcal{G}) = N(A).$$
□

Nástin důkazu: Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$. Zkonstruujeme zásobníkový automat A s jedním stavem q takto:

- $Q_A = \{q\}$, $q_0 = q$,
- $\Gamma_A = N \cup \Sigma$,
- $Z_0 = S$,
- $\delta_A(q, \varepsilon, X) = \{(q, \alpha) \mid X \to \alpha \in P, X \in N\}$,
- $\delta_A(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$, pro $a \in \Sigma$.

Zhruba řečeno, je-li na vrcholu zásobníku automatu A neterminál X, nahradíme ho v zásobníku pravou stranou některého pravidla gramatiky $\mathcal{G}$ s levou stranou X (a přitom nečteme vstupní symbol, tudíž neposunujeme hlavu na vstupní pásce). Je-li na vrcholu zásobníku terminál $a \in \Sigma$, tak v případě, že a je též na vstupu, odstraníme ho z vrcholu zásobníku a hlavu na vstupní pásce posuneme o jedno políčko doprava. Jestliže se terminální písmeno na vrcholu zásobníku nerovná prvnímu čtenému symbolu, automat se neúspěšně zastaví.

Platí, že zásobníkový automat A přijme slovo $u \in \Sigma^\star$ prázdným zásobníkem právě tehdy, když je slovo u vygenerováno gramatikou $\mathcal{G}$.

3.2.24 Poznámka. Zásobníkový automat konstruovaný v důkazu tvrzení 3.2.23 je vlastně formalizací tzv. analýzy shora. Zhruba řečeno, máme slovo a chceme vědět, zda je generováno CF gramatikou $\mathcal{G}$ nebo ne. Automat vlastně „zkouší“, která pravidla odvození může obsahovat a kontroluje, zda se takto dostane k vygenerování slova nebo nedostane. Více o analýze shora uvedeme později.

3.2.25 Příklad. Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ pravidly:

$$S \to aSa \mid A$$
$$A \to bA \mid \varepsilon$$

Řešení. konstruujme zásobníkový automat $A = (Q_A, \Sigma, \Gamma_A, \delta_A, q_0, Z_0)$, který přijímá jazyk $L(\mathcal{G})$. A má jeden stav, tj. $Q = \{q\}$, který je počátečním stavem. Dále množina zásobníkových symbolů je $\Gamma = \{a, b, S, A\}$, počáteční zásobníkový stav je S, a přechodová funkce δ je definovaná

$$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, aSa), (q, A)\}, \quad \delta(q, A) = \{(q, bA), (q, \varepsilon)\}, \quad \delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}, \quad \delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\},$$

ve všech ostatních případech přechod není definován, tj. $\delta(q, c, X) = \emptyset$.

3.2.26 Následující věta ukazuje, že třída jazyků přijímaných některým zásobníkovým automatem je třída bezkontextových jazyků.

Věta. Ke každému zásobníkovému automatu A existuje bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ taková, že

$$N(A) = L(\mathcal{G}).$$

□

Důkaz věty 3.2.26 (jedná se o opačnou implikaci k větě 3.2.23) je obtížnější. Je třeba ho rozdělit do dvou kroků. Nejprve se dokáže, že pro každý zásobníkový automat A existuje zásobníkový automat B s jedním stavem takový, že $N(A) = N(B)$.

V druhém kroku se pro zásobníkový automat B s jedním stavem vytvoří bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$, která generuje stejná slova jako zásobníkový automat B přijme prázdným zásobníkem. Jedná se vlastně o opačný postup jako v důkazu věty z 3.2.23.

3.2.27 Deterministický zásobníkový automat. Na rozdíl od konečných automatů pro zásobníkové automaty platí, že v definici zásobníkového automatu bylo podstatné, že jsme ho definovali jako nedeterministický. Je to proto, že nedeterministické zásobníkové automaty přijímají větší třídu jazyků než deterministické. Dříve než se o tom přesvědčíme, zadefinujeme pojem deterministického zásobníkového automatu.

Definice. Je dán zásobníkový automat $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Řekneme, že A je *deterministický zásobníkový automat*, jestliže splňuje následující dvě podmínky:

- Pro každé $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $X \in \Gamma$ je $\delta(q, a, X)$ nejvýše jednoprvková (tj. $|\delta(q, a, X)| \leq 1$).
- Jestliže pro nějaké $q \in Q$ a $X \in \Gamma$ je $\delta(q, \varepsilon, X)$ neprázdné, pak pro každé $a \in \Sigma$ je $\delta(q, a, X)$ prázdná množina.

□

Uvědomte si, že předchozí dvě podmínky zajišťují, že v každém okamžiku máme vždy nejvýše jednu možnost, jak pokračovat. Ano, druhá podmínka říká, že si nikdy zásobníkový automat nemůže vybrat zda bude pokračovat „bez čtení vstupního symbolu“ nebo „se čtením vstupního symbolu“.

3.2.28 Jazyky přijímané deterministickým zásobníkovým automatem. Stejně jako u (nedeterministických) zásobníkových automatů rozlišujeme i u deterministických zásobníkových automatů příjímání koncovým stavem a přijímání prázdným zásobníkem. Tj. pro daný deterministický zásobníkový automat $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je

$$L(A) = \{u \mid (q_0, u, Z_0) \vdash_A^\star (p, \varepsilon, \gamma),\, p \in F\}$$

$$N(A) = \{u \mid (q_0, u, Z_0) \vdash_A^\star (p, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

□

Na rozdíl od nedeterministických zásobníkových automatů, pro deterministické zásobníkové automaty neplatí, že přijímání prázdným zásobníkem a přijímání koncovým stavem „je totéž“.

Definice. Jazyk L nazveme *deterministický*, jestliže existuje deterministický zásobníkový automat, který L přijímá koncovým stavem. □

Definice. Deterministický jazyk L nazveme *bezprefixový*, jestliže existuje deterministický zásobníkový automat, který ho přijímá prázdným zásobníkem. □

Název bezprefixový jazyk pochází z faktu, že jazyk přijímaný deterministickým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem nemůže obsahovat současně dvě různá slova u, v, kdy jedno je prefixem druhého.

3.2.29 Tvrzení. Každý jazyk přijímaný deterministickým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem je také přijímán (nějakým) deterministickým zásobníkovým automatem koncovým stavem.

Jinými slovy: Pro každý deterministický zásobníkový automat A existuje deterministický zásobníkový automat B takový, že

$$N(A) = L(B).$$

□

Důkaz je obdobný jako důkazu věty 3.2.20. Ano, jestliže totiž vycházíme z deterministického zásobníkového automatu A, pak i automat B je deterministický.

Obdoba tvrzení 3.2.21 pro deterministické zásobníkové automaty neplatí. Konstrukce zásobníkového automatu B z automatu A totiž vede na nedeterministický zásobníkový automat. Navíc, jestliže deterministický zásobníkový automat A přijme slovo u prázdným zásobníkem, pak nemůže prázdným zásobníkem přijmout žádné slovo uv, kde $v \neq \varepsilon$; tato vlastnost ale neplatí pro všechny jazyky přijímané deterministickým zásobníkovým automatem koncovým stavem.

3.2.30 Vztah mezi třídami regulárních jazyků, bezprefixových jazyků a deterministických jazyků.

- Třída deterministických jazyků **obsahuje** třídu bezprefixových jazyků. To dokazuje tvrzení 3.2.29.
- Třída deterministických jazyků **obsahuje** třídu regulárních jazyků. Ano, na každý deterministický konečný automat se můžeme dívat jako na deterministický zásobníkový automat, kde na obsahu zásobníku nezáleží.
- Třída bezprefixových jazyků **neobsahuje** třídu regulárních jazyků. Ano, např. jazyk $\{a, aa\}$ je regulární (je konečný), ale není bezprefixový.
- Třída regulárních jazyků **neobsahuje** třídu bezprefixových jazyků. Ano, např. jazyk $L = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^\star\}$ je bezprefixový, ale není regulární. (Jako cvičení sestrojte deterministický zásobníkový automat, který přijímá jazyk L prázdným zásobníkem.)

3.3 Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

3.3.1 Tvrzení. Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny na sjednocení.

To znamená, jsou-li L_1 a L_2 dva bezkontextové jazyky, pak také jazyk $L_1 \cup L_2$ je bezkontextový. □

Zdůvodnění: Jazyky L_1, L_2 jsou bezkontextové, proto existují bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma, S_1, P_1)$ a $\mathcal{G}_2 = (N_2, \Sigma, S_2, P_2)$ takové, že $\mathcal{G}_1$ generuje L_1 a $\mathcal{G}_2$ generuje L_2. Přejmenujeme neterminály gramatiky $\mathcal{G}_2$ tak, aby gramatiky neměly žádný společný neterminál (tj. $N_1 \cap N_2 = \emptyset$).

Gramatiku $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ generující jazyk $L_1 \cup L_2$ vytvoříme takto:

a) $N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$, kde S je nový startovací symbol ($S \notin N_1 \cup N_2$).

b) $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$, tj. k pravidlům gramatik $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ přidáme dvě nová pravidla $S \to S_1$ a $S \to S_2$.

Není těžké ukázat, že gramatika $\mathcal{G}$ generuje jazyk $L_1 \cup L_2$.

3.3.2 Tvrzení. Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny na zřetězení.

To znamená, jsou-li L_1 a L_2 dva bezkontextové jazyky, pak také jazyk $L_1\, L_2$ je bezkontextový. □

Zdůvodnění: Jazyky L_1, L_2 jsou bezkontextové, proto existují bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma, S_1, P_1)$ a $\mathcal{G}_2 = (N_2, \Sigma, S_2, P_2)$ takové, že $\mathcal{G}_1$ generuje L_1 a $\mathcal{G}_2$ generuje L_2. Přejmenujeme neterminály gramatiky $\mathcal{G}_2$ tak, aby gramatiky neměly žádný společný neterminál (tj. $N_1 \cap N_2 = \emptyset$).

Gramatiku $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ generující jazyk $L = L_1 L_2$ vytvoříme takto:

a) $N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$, kde S je nový startovací symbol ($S \notin N_1 \cup N_2$).

b) $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$, tj. k pravidlům gramatik $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ přidáme nové pravidlo $S \to S_1 S_2$.

Není těžké ukázat, že gramatika $\mathcal{G}$ generuje jazyk $L_1 L_2$.

3.3.3 Tvrzení. Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny na Kleeneho operaci $\star$. □

To znamená, je-li L bezkontextový jazyk, pak také jazyk $L^\star$ je bezkontextový.

Zdůvodnění: Jazyk L je bezkontextový, proto existuje bezkontextová gramatika $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma, S_1, P_1)$ taková, že $L = L(\mathcal{G}_1)$. Gramatiku $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ generující jazyk $L^\star$ vytvoříme takto:

a) $N = N_1 \cup \{S\}$, kde S je nový startovací symbol ($S \notin N_1$).

b) $P = P_1 \cup \{S \to S_1 S, S \to \varepsilon\}$, tj. k pravidlům gramatik $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ přidáme dvě nová pravidla $S \to S_1 S$, $S \to \varepsilon$.

Není těžké ukázat, že gramatika $\mathcal{G}$ generuje jazyk $L^\star$.

3.3.4 Tvrzení. Bezkontextové jazyky **nejsou** uzavřeny na průnik.

To znamená, jsou-li L_1 a L_2 dva bezkontextové jazyky, pak jazyk $L_1 \cap L_2$ nemusí být bezkontextový. □

Zdůvodnění: Uvažujme jazyk $L_1 = \{0^k 1^n 2^n \mid k, n \geq 1\}$ a jazyk $L_2 = \{0^k 1^k 2^n \mid k, n \geq 1\}$. Oba tyto jazyky jsou bezkontextové, ale jejich průnik je jazyk $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\}$, o kterém víme, že není bezkontextový (viz **??**).

3.3.5 Tvrzení. Bezkontextové jazyky **nejsou** uzavřeny na doplněk.

To znamená, je-li L bezkontextový jazyk, pak jeho doplněk $\overline{L}$ nemusí být bezkontextový. □

Zdůvodnění: Kdyby třída bezkontextových jazyků byla uzavřena na doplňky, byla by uzavřena i na průniky, protože

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}},$$

což víme, že neplatí.