

**Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte. Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy. Každý úloha má určen minimální počet bodů, kterého je třeba dosáhnout.**

1. [MAX. ZISK: 25 BODŮ, NUTNÝ ZISK: 5 BODŮ] V tomto příkladě se jedná o výrokovou logiku.
- (a) [MAX. ZISK: 3 BODY] Definujte, co znamená, že formule  $\varphi$  sémanticky vyplývá z množiny formulí  $M$  (tj. co znamená  $M \models \varphi$ ).
  - (b) [MAX. ZISK: 6 BODŮ] Podle definice rozhodněte, zda formule  $\alpha$  sémanticky vyplývá z množiny formulí  $S$ , kde  $S = \{b \Rightarrow (a \vee c), c \Rightarrow \neg b, a \Leftrightarrow (b \wedge c)\}$ ,  $\alpha = ((a \wedge b) \Rightarrow \neg c) \wedge \neg a$  ( $a, b, c$  jsou logické proměnné).
  - (c) [MAX. ZISK: 3 BODY] Pro množinu formulí  $S$  a formuli  $\alpha$  z bodu (b) rozhodněte, zda je splnitelná množina  $S \cup \{\neg\alpha\}$ . (Splnitelnou množinu definujte, odpověď zdůvodněte.)
  - (d) [MAX. ZISK: 5 BODŮ] Pro množinu formulí  $S$  a formuli  $\alpha$  z bodu (b) najděte formuli  $\beta$  takovou, že  $S \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$  a  $S \not\models \beta$ , nebo dokažte, že taková formule  $\beta$  neexistuje.
  - (e) [MAX. ZISK: 8 BODŮ] Ať  $A$  je množina logických proměnných, ať  $B, C$  jsou podmnožiny množiny  $A$ . Dále jsou  $\varphi$  a  $\psi$  dvě formule takové, že  $B \models \varphi$  a  $C \models \psi$ . Rozhodněte, zda potom nutně platí:
    - (i)  $B \cup C \models \varphi \wedge \psi$ .
    - (ii)  $\overline{B} \models \neg\varphi$ , kde  $\overline{B} = A \setminus B$ .

2. [MAX. ZISK: 30 BODŮ, NUTNÝ ZISK: 7 BODŮ] V tomto příkladě se jedná o predikátovou logiku. Jsou dány formule

$$\alpha = (\forall x \exists y P(x, y)) \Rightarrow (\exists y \forall x P(x, y)), \quad \beta = P(a, b).$$

- (a) [MAX. ZISK: 4 BODY] Definujte pojem sentence a popište jazyk, ve kterém jsou obě formule  $\alpha$  a  $\beta$  sentence.
- (b) [MAX. ZISK: 8 BODŮ] Definujte pojem *splnitelná sentence*. Rozhodněte na základě definice, zda je  $\alpha$  splnitelná sentence. (Tj. buď ukažte, že splnitelná není, nebo příslušnou interpretaci *podrobně* popište a vše *podrobně* zdůvodněte).
- (c) [MAX. ZISK: 8 BODŮ] Definujte pojem *tautologie*. Je sentence  $\alpha$  tautologie? Odpověď pečlivě zdůvodněte.
- (d) [MAX. ZISK: 7 BODŮ] Převeďte do klauzálního tvaru sentenci  $\alpha$  (kroky převodu popište).
- (e) [MAX. ZISK: 3 BODY] Resoluční metodou zjistěte, zda platí sémantický důsledek  $\alpha \models \beta$ .

► Interpretujte vždy na jasně definované množině, která má alespoň dva prvky. Danou množinu zadejte buďto výčtem všech prvků, nebo matematickou značkou. Interpretace na množině **všech** lidí, **všech** psů nebo **všech** hub v šatně plaveckého stadiónu atd., **nebudou uznány jako správné**.

3. [MAX. ZISK: 45 BODŮ, NUTNÝ ZISK: 13 BODŮ]

- (a) [MAX. ZISK: 3 BODY] Definujte pojem *komponenta souvislosti* v neorientovaném grafu.
- (b) [MAX. ZISK: 7 BODŮ] O prostém neorientovaném grafu  $G$  bez smyček víte, že má  $n > 3$  vrcholů,  $n$  hran a 2 komponenty souvislosti. Kolik nejméně a kolik nejvíce kružnic graf  $G$  obsahuje? Odpověď řádně zdůvodněte. Uveďte příklad grafu o nejmenším počtu kružnic a příklad grafu o největším počtu kružnic pro  $n = 8$ .
- (c) [MAX. ZISK: 3 BODY] Definujte pojem *minimální kostra* neorientovaného ohodnoceného grafu.
- (d) [MAX. ZISK: 7 BODŮ] Uveďte některou postačující podmínku pro to, aby v neorientovaném ohodnoceném grafu existovala právě jedna minimální kostra. Je podmínka, kterou jste uvedl/a, nutná? Buď ukažte, že nutná je, nebo najděte protipříklad.
- (e) [MAX. ZISK: 3 BODY] Definujte pojem *otevřený orientovaný eulerovský tah* v orientovaném grafu.
- (f) [MAX. ZISK: 5 BODŮ] Formulujte nutnou a postačující podmínku pro to, aby v daném souvislém orientovaném grafu  $G$  existoval otevřený orientovaný eulerovský tah.
- (g) [MAX. ZISK: 10 BODŮ] Rozhodněte, zda graf s množinou vrcholů  $V = \{1, \dots, 8\}$  a daný seznamem hran obsahuje otevřený eulerovský tah.

PV	1	1	1	2	2	3	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8
KV	2	3	5	1	3	1	4	6	1	2	4	3	7	8	5	6

Jestliže tah existuje, запиšte jej jako posloupnost hran, jestliže takový tah neexistuje, zdůvodněte proč neexistuje.

- (h) [MAX. ZISK: 7 BODŮ] Existuje souvislý orientovaný graf  $G$  s  $n > 2$  vrcholy, který je acyklický a současně obsahuje otevřený orientovaný eulerovský tah? Jestliže existuje, nakreslete příklad takového grafu  $G$  (a zdůvodněte, že je acyklický a že v něm existuje otevřený orientovaný eulerovský tah); jestliže neexistuje, zdůvodněte.