Kapitola 1

Výroková logika

1.1 Výroky

1.1.1 Definice. Máme danou neprázdnou množinu A tzv. *atomických výroků* (též jim říkáme *logické proměnné*). Konečnou posloupnost prvků z množiny A, logických spojek a závorek nazýváme *výroková formule* (zkráceně jen *formule*), jestliže vznikla podle následujících pravidel:

1. Každá logická proměnná (atomický výrok) $a \in A$ je výroková formule.

2. Jsou-li α, β výrokové formule, pak $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ a $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jsou také výrokové formule.

3. Nic jiného než to, co vzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 a 2, není výroková formule.

Všechny formule, které vznikly z logických proměnných množiny A, značíme $\mathcal{P}(A)$. □

1.1.2 Poznámka. Spojka $\neg$ se nazývá *unární*, protože vytváří novou formuli z jedné formule. Ostatní zde zavedené spojky se nazývají *binární*, protože vytvářejí novou formuli ze dvou formulí.

V dalším textu budeme vždy jako množinu atomických výroků (logických proměnných) A volit malá písmena anglické abecedy, případně je budeme indexovat. A tedy obsahuje $a, b, c, \ldots x, y, z$ nebo $x_1, x_2, \ldots$. Výrokové formule označujeme malými řeckými písmeny, např. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nebo $\varphi, \psi, \ldots$.

Většinou nebudeme ve formulích psát ty nejvíc vnější závorky — tj. píšeme $a \vee (b \Rightarrow c)$ místo $(a \vee (b \Rightarrow c))$.

1.1.3 Syntaktický strom formule. To, jak formule vznikla podle bodů 1 a 2, si můžeme znázornit na *syntaktickém stromu*, též *derivačním stromu* dané formule. Jedná se o kořenový strom, kde každý vrchol, který není listem, je ohodnocen logickou spojkou a jedná-li se o binární spojku, má vrchol dva následníky, jedná-li se o unární spojku, má vrchol pouze jednoho následníka. Přitom pro formule tvaru $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ a $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ odpovídá levý následník formuli α, pravý následník formuli β. Listy stromu jsou ohodnoceny logickými proměnnými.

1.1.4 Podformule. Ze syntaktického stromu formule α jednoduše poznáme všechny její podformule: *Podformule* formule α jsou všechny formule odpovídající podstromům syntaktického stromu formule α.

1.2 Pravdivostní ohodnocení

1.2.1 Definice. *Pravdivostní ohodnocení*, též pouze *ohodnocení formulí*, je zobrazení $u\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}$, které splňuje následující pravidla

(1) $\neg\alpha$ je **pravdivá** právě tehdy, když α je nepravdivá, tj $u(\neg\alpha) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = 0$;

(2) $\alpha \wedge \beta$ je **pravdivá** právě tehdy, když α a β jsou obě pravdivé, tj. $u(\alpha \wedge \beta) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta) = 1$;

(3) $\alpha \vee \beta$ je **nepravdivá** právě tehdy, když α a β jsou obě nepravdivé, tj. $u(\alpha \vee \beta) = 0$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta) = 0$;

(4) $\alpha \Rightarrow \beta$ je **nepravdivá** právě tehdy, když α je pravdivá a β nepravdivá, tj. $u(\alpha \Rightarrow \beta) = 0$ právě tehdy, když $u(\alpha) = 1$ a $u(\beta) = 0$;

(5) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je **pravdivá** právě tehdy, když buď obě formule α a β jsou pravdivé nebo obě jsou nepravdivé tj. $u(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta)$.

□

1.2.2 Pravdivostní tabulky. Vlastnosti, které ohodnocení formulí musí mít, znázorňujeme též pomocí tzv. pravdivostních tabulek logických spojek. Jsou to:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.2.3 Věta. Každé zobrazení $u_0\colon A \to \{0,1\}$ jednoznačně určuje ohodnocení $u : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}$ takové, že $u_0(a) = u(a)$ pro všechna $a \in A$. □

Stručné zdůvodnění: Vezměme formuli α. Známe-li pravdivostní hodnotu logických proměnných, tj. listů syntaktického stromu formule α, pak jednoznačně určujeme pravdivostní hodnotu všech podformulí na základě 1.2.1, a to postupem ve stromě „směrem nahoru“.

Formálně správný důkaz je veden indukcí podle výšky syntaktického stromu formule α.

1.2.4 Důsledek. Dvě ohodnocení $u, v\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}$ jsou shodná právě tehdy, když pro všechny logické proměnné $x \in A$ platí $u(x) = v(x)$. □

1.2.5 Poznámka. Uvědomte si, že pravdivostní ohodnocení je zobrazení u, které *každé* formuli α přiřazuje 0 (α není pravdivá v u) nebo 1 (α je pravdivá v u) takové, že u splňuje podmínky z definice 1.2.1. Věta 1.2.3 říká, že přestože všech formulí je spočetně mnoho, je různých pravdivostních ohodnocení je tolik, kolik existuje zobrazení množiny A do množiny $\{0,1\}$. V případě, že A je konečná množina, je takových různých zobrazení jen konečně mnoho; přesněji $2^{|A|}$, kde $|A|$ je počet prvků množiny A.

1.2.6 Definice tautologie, kontradikce a splnitelné formule. Formule se nazývá *tautologie*, jestliže je pravdivá ve všech ohodnocení; nazývá se *kontradikce*, jestliže je nepravdivá ve všech ohodnocení. Formule je *splnitelná*, jestliže existuje aspoň jedno ohodnocení, ve kterém je pravdivá. □

1.2.7 Příklady Jsou dány dvě formule α, β a logické proměnné a, b, pak

1. formule $\alpha \vee \neg\alpha$, $\alpha \Rightarrow \alpha$, $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ jsou tautologie;
2. formule $a \vee b$, $(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$ jsou splnitelné, ale ne tautologie;
3. formule $\alpha \wedge \neg\alpha$ je kontradikce.
4. Kontradikce je také každá negace tautologie. A naopak, negace libovolné kontradikce je tautologie.

1.3 Tautologická ekvivalence

1.3.1 Definice. Řekneme, že formule φ a ψ jsou *tautologicky ekvivalentní* (také *sémanticky ekvivalentní*), jestliže pro každé ohodnocení u platí $u(\varphi) = u(\psi)$. □

Fakt, že dvě formule φ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní, zapisujeme $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$.

1.3.2 Tvrzení. Pro každé formule α, β a γ platí:

- $\alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$,
- je-li $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$, pak i $\beta \models\!\!\!\dashv \alpha$,
- je-li $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$ a $\beta \models\!\!\!\dashv \gamma$, pak i $\alpha \models\!\!\!\dashv \gamma$.

Jsou-li α, β, γ a δ formule splňující $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$ a $\gamma \models\!\!\!\dashv \delta$, pak platí

- $\neg\alpha \models\!\!\!\dashv \neg\beta$;
- $(\alpha \wedge \gamma) \models\!\!\!\dashv (\beta \wedge \delta)$, $(\alpha \vee \gamma) \models\!\!\!\dashv (\beta \vee \delta)$, $(\alpha \Rightarrow \gamma) \models\!\!\!\dashv (\beta \Rightarrow \delta)$, a také $(\alpha \Leftrightarrow \gamma) \models\!\!\!\dashv (\beta \Leftrightarrow \delta)$.

□

1.3.3 Poznámka. Předchozí tvrzení můžeme využít i takto: Platí

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \models\!\!\!\dashv (\neg\alpha \vee \beta)$$

(to zjistíme např. z pravdivostních tabulek formulí $\alpha \Rightarrow \beta$ a $\neg\alpha \vee \beta$). Na základě tvrzení 1.3.2 „dosazujeme“ ve formuli $((c \Rightarrow \neg(a \vee b)) \wedge \neg b$ za spojku $\Rightarrow$ v podformuli $c \Rightarrow \neg(a \vee b)$ a dostáváme

$$((c \Rightarrow \neg(a \vee b)) \wedge \neg b \models\!\!\!\dashv (\neg c \vee \neg(a \vee b)) \wedge \neg b.$$

(Zde $\alpha = c$ a $\beta = \neg(a \vee b)$.) Takovéto „dosazování“ předchozí tvrzení umožňuje.

1.3.4 Tvrzení. Pro každé formule α, β a γ platí

- $\alpha \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$, $\alpha \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$ (idempotence $\wedge$ a $\vee$);
- $\alpha \wedge \beta \models\!\!\!\dashv \beta \wedge \alpha$, $\alpha \vee \beta \models\!\!\!\dashv \beta \vee \alpha$ (komutativita $\wedge$ a $\vee$);
- $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ (asociativita $\wedge$ a $\vee$);
- $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \models\!\!\!\dashv \alpha$, $\alpha \vee (\beta \wedge \alpha) \models\!\!\!\dashv \alpha$ (absorpce $\wedge$ a $\vee$);
- $\neg\neg\alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$;
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \models\!\!\!\dashv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$, $\neg(\alpha \vee \beta) \models\!\!\!\dashv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (de Morganova pravidla);
- $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ (distributivní zákony);
- $(\alpha \Rightarrow \beta) \models\!\!\!\dashv (\neg\alpha \vee \beta)$.

Je-li navíc $\mathbf{T}$ libovolná tautologie a $\mathbf{F}$ libovolná kontradikce, pak

- $\mathbf{T} \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$, $\mathbf{T} \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \mathbf{T}$, $\mathbf{F} \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \mathbf{F}$, $\mathbf{F} \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$;
- $\alpha \wedge \neg\alpha \models\!\!\!\dashv \mathbf{F}$, $\alpha \vee \neg\alpha \models\!\!\!\dashv \mathbf{T}$.

□

1.3.5 Poznámka. Pro každé dvě formule α a β platí: $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$ právě tehdy, když $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je tautologie.

1.3.6 Příklad. Pro každou formuli α je formule $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ tautologie.

Ano, máme

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha) \models\!\!\!\dashv \neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \alpha) \models\!\!\!\dashv (\neg\alpha \vee \alpha) \vee \neg\beta,$$

kde poslední formule je tautologie. To je proto, že formule $\neg\alpha \vee \alpha$ je tautologie a tudíž na pravdivosti či nepravdivosti formule β nezáleží.

1.3.7 Další spojky. Pravdivostní tabulka libovolné formule s jednou logickou proměnnou představuje zobrazení z množiny $\{0,1\}$ do množiny $\{0,1\}$. Existují čtyři zobrazení z množiny $\{0,1\}$ do množiny $\{0,1\}$:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Zobrazení f_1 je konstantní 0, a odpovídá libovolné formuli s jednou proměnnou, která je kontradikcí. Podobě zobrazení f_4 odpovídá formuli, která je tautologie. Zobrazení f_2 formuli x (zde x je logická proměnná), a zobrazení f_3 odpovídá formuli $\neg x$. Tedy nemáme důvod definovat „další“ unární spojky.

1.3.8 Další binární spojky. Každá formule s nejvýše dvěma logickými proměnnými představuje zobrazení z množiny $\{0,1\}^2$ do množiny $\{0,1\}$. Existuje šestnáct takových zobrazení:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Každá ze zobrazení $f_0, \ldots, f_{15}$ odpovídá nějaké formuli; např. f_0 odpovídá libovolné kontradikci, f_{15} libovolné tautologii, f_1 formuli $x \wedge y$, zobrazení f_{10} formuli $\neg y$, atd. Jako „nové“ spojky zavedeme spojky odpovídající zobrazením f_6, f_8 a f_{14}.

1.3.9 NAND. Definujeme novou logickou spojku $|$, nazývanou NAND (také *Shefferův operátor*), jako spojku, pro kterou $\alpha \mid \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α i β jsou obě pravdivé. □

1.3.10 Tvrzení. Platí

$$\alpha \mid \beta \models\!\!\!\dashv \neg(\alpha \wedge \beta).$$

□

Poznamenejme, že pravdivostní tabulka spojky NAND odpovídá zobrazení f_{14}.

1.3.11 NOR. Definujeme novou logickou spojku $\downarrow$, nazývanou *NOR* (také *Peirceova šipka*), jako spojku, pro kterou $\alpha \downarrow \beta$ je pravdivá právě tehdy, když α i β jsou obě nepravdivé. □

1.3.12 Tvrzení. Platí

$$\alpha \downarrow \beta \models\!\!\!\dashv \neg(\alpha \vee \beta).$$

□

Poznamenejme, že pravdivostní tabulka spojky NOR odpovídá zobrazení f_8.

1.3.13 XOR. Definujeme novou logickou spojku $\oplus$, nazývanou *XOR* (také *vylučovací nebo*), jako spojku, pro kterou $\alpha \oplus \beta$ je pravdivá právě tehdy, když buď α je nepravdivá a β je pravdivá, nebo α je pravdivá a β je nepravdivá. □

1.3.14 Tvrzení. Platí

$$\alpha \oplus \beta \models\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \models\!\!\!\dashv \neg(\alpha \Leftrightarrow \beta).$$

□

Poznamenejme, že pravdivostní tabulka spojky XOR odpovídá zobrazení f_6.

1.3.15 Spojka F a T. Zavedeme ještě dvě spojky a to **F** a **T**; řetězce **F** a **T** budou také formulemi, přestože neobsahují žádnou logickou proměnnou. O těchto spojkách říkáme, že jsou *nulární*.

Platí: $\mathbf{F} \models\!\!\!\dashv \alpha$ pro každou kontradikci α. Tedy např. $\mathbf{F} \models\!\!\!\dashv (a \wedge \neg a)$. Dále $\mathbf{T} \models\!\!\!\dashv \neg\mathbf{F}$, tedy např. $\mathbf{T} \models\!\!\!\dashv (A \vee \neg a)$.

1.3.16 Poznámka. Protože jsme v předchozích odstavcích zavedli nové spojky NAND, NOR, XOR, **F** a **T**, měli bychom správně rozšířit definici formule; totiž tak, že

- **F** je formule, **T** je formule,
- jestliže α a β jsou formule, tak $(\alpha \mid \beta)$, $(\alpha \downarrow \beta)$ a $(\alpha \oplus \beta)$ jsou také formule.

Na druhou stranu víme, že každou formuli, která obsahuje spojky NAND, NOR, XOR, **F** nebo **T** jsme schopni nahradit tautologicky ekvivalentní formulí, která obsahuje jen původní spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$.