1.6 Booleovský kalkul.

Označme $x = u(a)$ a $y = u(b)$. Pak pro pravdivostní ohodnocení u platí:

$$\begin{aligned} u(a \vee b) &= \max\{u(a), u(b)\} = \max\{x, y\}, \\ u(a \wedge b) &= \min\{u(a), u(b)\} = \min\{x, y\}, \\ u(\neg a) &= 1 - u(a) = 1 - x. \end{aligned}$$

1.6.1 Booleovské operace. To motivuje zavedení booleovských operací (pro hodnoty 0, 1) takto:

$$\begin{array}{lrcl} \text{logický součin} & x \cdot y & = & \min\{x, y\}, \\ \text{logický součet} & x + y & = & \max\{x, y\}, \\ \text{doplněk} & \overline{x} & = & 1 - x. \end{array}$$

Pro tyto operace platí řada rovností, tak, jak je známe z výrokové logiky. Uvědomte si, že se vlastně jedná o přeformulování tvrzení 1.3.4.

1.6.2 Tvrzení. Pro všechna $x, y, z \in \{0, 1\}$ platí:

1. $x \cdot x = x,\ x + x = x;$
2. $x \cdot y = y \cdot x,\ x + y = y + x;$
3. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ x + (y + z) = (x + y) + z;$
4. $x \cdot (y + x) = x,\ x + (y \cdot x) = x;$
5. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z),\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z);$
6. $\overline{\overline{x}} = x;$
7. $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y},\ \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y};$
8. $x + \overline{x} = 1,\ x \cdot \overline{x} = 0;$
9. $x \cdot 0 = 0,\ x \cdot 1 = x;$
10. $x + 1 = 1,\ x + 0 = x.$

□

1.6.3 Booleovy funkce v DNF a CNF. Nyní můžeme Booleovu funkci psát pomocí výše uvedených operaci, např.

$$f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z\ + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z\ + x\,\overline{y}\,z$$

a říkat, že jsme Booleovu funkci napsali v *disjunktivní normální formě.* Rovnost opravdu platí; dosadíme-li za proměnné Booleovy funkce jakékoli hodnoty, pak pravá strana rovnosti určuje hodnotu Booleovy funkce f. Obdobně jako jsme Booleovu funkci f napsali v disjunktivní normální formě, můžeme ji také napsat v *konjunktivní normální formě* a to takto:

$$f(x, y, z) = (\overline{x} + y + z)\,(\overline{x} + \overline{y} + z)\,(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}).$$

1.6.4 Věta. Každou Booleovu funkci lze napsat v disjunktivní normální formě i v konjunktivní normální formě. □

1.7 Sémantický důsledek

1.7.1 Množina formulí pravdivá v ohodnocení.

Definice. Řekneme, že množina formulí S je *pravdivá* v ohodnocení u, jestliže každá formule z S je pravdivá v u, tj. jestliže $u(\varphi) = 1$ pro všechna $\varphi \in S$. □

Uvědomte si, že množina formulí S je nepravdivá v ohodnocení u, jestliže existuje formule $\varphi \in S$, která je nepravdivá v ohodnocení u.

1.7.2 Poznámka. Fakt, že množina formulí S je pravdivá v ohodnocení u zapisujeme též $u(S) = 1$; fakt, že S je nepravdivá v u, zapisujeme také $u(S) = 0$.

Poznamejme. že prázdná množina formulí je pravdivá v každém ohodnocení. Ano, každá množina je v daném ohodnocení u buď pravdivá nebo nepravdivá. Vezměme libovolné ohodnocení u; prázdná množina v něm nemůže být nepravdivá, to by musela existovat formule $\varphi \in \emptyset$, která by byla v u nepravdivá. Proto je $\emptyset$ v u pravdivá.

1.7.3 Splnitelná množina formulí.

Definice. Řekneme, že množina formulí S je *splnitelná*, jestliže existuje pravdivostní ohodnocení u, v němž je S pravdivá. V opačném případě se množina S nazývá *nesplnitelná.* □

1.7.4 Poznamenejme, že z předchozí poznámky vyplývá, že prázdná množina formulí je splnitelná, neboť je pravdivá nejen v jednom, ale dokonce ve všech pravdivostních ohodnocení.

1.7.5 Sémantický důsledek.

Definice. Řekneme, že formule φ je *konsekventem*, též *sémantickým* nebo *tautologickým důsledkem* množiny formulí S, jestliže φ je pravdivá v každém ohodnocení u, v němž je pravdivá S. □

1.7.6 Značení. Fakt, že formule φ je konsekventem množiny S, označujeme $S \models \varphi$. Je-li množina S prázdná, píšeme $\models \varphi$ místo $\emptyset \models \varphi$. Je-li množina S jednoprvková, tj. $S = \{\alpha\}$, píšeme $\alpha \models \varphi$ místo $\{\alpha\} \models \varphi$.

1.7.7 Poznámka. Definici sémantického důsledku můžeme přeformulovat následovně:

$$S \models \varphi \quad \text{právě tehdy, když} \quad u(S) \leq u(\varphi) \ \text{ pro každé ohodnocení } u.$$

Uvědomte si také, že φ *není sémantický důsledek* množiny formulí S, tj. neplatí $S \models \varphi$, právě tehdy, když existuje pravdivostní ohodnocení u takové, že množina S je v něm pravdivá a formule φ ne.

1.7.8 Příklady. Pro každé formule α, β, γ platí

1. $\{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta\} \models \beta$.
2. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta\} \models \neg\alpha$.
3. $\{\alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma\} \models \gamma$.
4. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \neg\beta\} \models \neg\alpha$.
5. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma\} \models (\alpha \Rightarrow \gamma)$.
6. $\{(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma, (\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \gamma\} \models (\alpha \Rightarrow \gamma)$.

1.7.9 Tvrzení.

1. Je-li S množina formulí a $\varphi \in S$, pak φ je konsekventem S. Jinými slovy $S \models \varphi$ pro každou $\varphi \in S$.

2. Tautologie je konsekventem každé množiny formulí S.

3. Formule φ je tautologie právě tehdy, když je konsekventem každé množiny S a to je právě tehdy, když je konsekventem prázdné množiny formulí.

4. Každá formule je konsekventem nesplnitelné množiny formulí.

5. Máme dvě množiny formulí M a N takové, že $M \subseteq N$. Pak každý konsekvent množiny M je také konsekventem množiny N, tj. je-li $M \models \varphi$, pak $N \models \varphi$.

6. Je-li φ konsekventem množiny formulí $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ a každá formule α_i je konsekventem množiny formulí S, pak φ je konsekventem S.

7. Jestliže $S \models \alpha$ i $S \models \neg\alpha$ pro nějakou formuli α, pak S je nesplnitelná množina formulí.

□

1.7.10 Poznámka. Uvědomme si, že $\alpha \models\!\!\!\!\dashv \beta$ právě tehdy, když platí současně $\alpha \models \beta$ a také $\beta \models \alpha$.

1.7.11 Tvrzení. Pro každé dvě formule α a β platí:

$$\alpha \models \beta \quad \text{právě tehdy, když} \quad \alpha \Rightarrow \beta \ \text{ je tautologie.}$$

□

1.7.12 Věta. Pro množinu formulí S a formuli φ platí

$$S \models \varphi \quad \text{právě tehdy, když} \quad S \cup \{\neg\varphi\} \quad \text{je nesplnitelná.}$$

□

Důkaz: Jedná se o ekvivalenci dvou tvrzení, musíme proto dokázat dvě implikace.

1. Předpokládejme, že platí $S \models \varphi$. Musíme ukázat, že neexistuje ohodnocení u, ve kterém by množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ byla pravdivá. Uvažujme libovolné ohodnocení u. Pak buď platí $u(S) = 0$ (tj. S není pravdivá v u), nebo $u(S) = 1$ (tj. S je pravdivá v u).

   Když $u(S) = 0$, pak $u(S \cup \{\neg\varphi\}) = 0$, neboť přidáním formule se z nepravdivé množiny pravdivá stát nemůže.

   Když $u(S) = 1$, pak $u(\varphi) = 1$ a proto $u(\neg\varphi) = 0$ a množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nepravdivá v u.

   Tedy neexistuje ohodnocení, ve kterém by množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ byla pravdivá, tudíž je nesplnitelná.

2. Předpokládejme, že množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná. Uvažujme ohodnocení u, ve kterém je S pravdivá. Pak $u(\neg\varphi) = 0$, jinak by $u(S \cup \{\neg\varphi\}) = 1$, a $S \cup \{\neg\varphi\})$ by byla splnitelná. Tedy $u(\varphi) = 1$, a proto $S \models \varphi$.

1.7.13 Věta o dedukci. Pro množinu formulí S a formule φ a ψ platí

$$S \cup \{\varphi\} \models \psi \quad \text{právě tehdy, když} \quad S \models (\varphi \Rightarrow \psi).$$

□

Důkaz: Opět je třeba dokázat dvě implikace.

1. Předpokládejme, že platí $S \cup \{\varphi\} \models \psi$. Uvažujme libovolné ohodnocení u, ve kterém je pravdivá množina S. V tomto ohodnocení je formule φ buď pravdivá nebo nepravdivá.

   Předpokládejme, že $u(\varphi) = 1$, pak $u(S \cup \{\varphi\}) = 1$ a proto $u(\psi) = 1$. To ale znamená, že formule $\varphi \Rightarrow \psi$ je pravdivá v u.

   Předpokládejme, že $u(\varphi) = 0$. Pak ale $u(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$ nezávisle na pravdivosti či nepravdivosti formule ψ.

   V obou případech je formule $\varphi \Rightarrow \psi$ pravdivá. Proto platí $u(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$, což dokazuje $S \models (\varphi \Rightarrow \psi)$.

2. Předpokládejme, že platí $S \models (\varphi \Rightarrow \psi)$. Uvažujme libovolné ohodnocení u, ve kterém je pravdivá množina $S \cup \{\varphi\}$. Pak platí $u(S) = 1$ a tudíž $u(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$. Protože navíc $u(\varphi) = 1$, musí platit i $u(\psi) = 1$. Dokázali jsme $S \cup \{\varphi\} \models \psi$.