1.8 Rezoluční metoda ve výrokové logice

1.8.1 Klauzule – připomenutí. Je dána množina logických proměnných A. *Literál* je buď logická proměnná (tzv. *pozitivní literál*) nebo negace logické proměnné (tzv. *negativní literál*). *Komplementární literály* jsou literály x a $\neg x$, kde x je logická proměnná. *Klauzule* je literál nebo disjunkce konečně mnoha literálů.

Za klauzuli budeme považovat ještě formuli $\mathbf{F}$ zastupující kontradikci, kterou budeme nazývat *prázdná klauzule.*

Nepřesně se na prázdnou klauzuli $\mathbf{F}$ můžeme dívat jako na „disjunkci žádného literálu".

1.8.2 Rezoluční metoda rozhoduje, zda daná množina klauzulí je splnitelná nebo je nesplnitelná. Tím je také „univerzální metodou" pro řešení základních problémů ve výrokové logice, neboť:

1. Daná formule φ je sémantickým důsledkem množiny formulí S právě tehdy, když množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná.
2. Ke každé formuli α existuje množina klauzulí S_α taková, že S_α i α jsou pravdivé ve stejných ohodnocení.

1.8.3 Konvence. Pro jednoduchost zavedeme následující konvenci: Máme dánu klauzuli C a literál p, který se v C vyskytuje. Pak symbolem $C \setminus p$ označujeme klauzuli, která obsahuje všechny literály jako C kromě p. Jestliže $C = p$, pak $C \setminus p$ je prázdná klauzule $\mathbf{F}$.

Tedy např. je-li $C = \neg x \vee y \vee \neg z$, pak

$$C \setminus \neg z = \neg x \vee y.$$

1.8.4 Resolventa dvou klauzulí.

Definice. Řekneme, že klauzule D je *resolventou klauzulí* C_1 a C_2, jestliže existuje logická proměnná x taková, že literál x se vyskytuje v klauzuli C_1, literál $\neg x$ se vyskytuje v klauzuli C_2 a D obsahuje všechny literály z klauzule $C_1 \setminus x$ a z klauzule $C_2 \setminus \neg x$ s tím, že každý lirerál obsahuje pouze jednou. Jestliže obě klauzule $C_1 \setminus x$, $C_2 \setminus \neg x$, neobsahují žádný literál, je resolventou prázdná klauzule $\mathbf{F}$.

Říkáme též, že klauzule D je *resolventou* C_1 *a* C_2 *podle* x a značíme $D = res_x(C_1, C_2)$. □

Poznamenejme, že resolventu D můžeme zapsat též takto:

$$D = (C_1 \setminus x) \vee (C_2 \setminus \neg x)$$

s tím, že D obsahuje každý literál pouze jednou (i kdyby byl obsažen v $C_1 \setminus x$ i $C_2 \setminus \neg x$).

1.8.5 Poznámka. Mohou existovat dvě klauzule C_1 a C_2, které mají resolventy podle dvou různých logických proměnných. V takovém případě jsou obě resolventy tautologie.

1.8.6 Tvrzení. Máme dány dvě klauzule C_1, C_2 a označme D jejich resolventu. Pak D je sémantický důsledek množiny $\{C_1, C_2\}$. □

Důkaz: Předpokládejme, že množina $\{C_1, C_2\}$ je pravdivá v ohodnocení u. Uvažujme resolventu $D = (C_1 \setminus p) \vee (C_2 \setminus \neg p)$.

Mohou nastat dva případy: $u(p) = 0$ nebo $u(p) = 1$. Předpokládejme, že $u(p) = 0$. Protože $u(C_1) = 1$ a $C_1 = (C_1 \setminus p) \vee p$, dostáváme $u(C_1 \setminus p) = 1$. Proto $u(D) = 1$.

Předpokládejme, že $u(p) = 1$. Protože $u(C_2) = 1$ a $C_2 = (C_2 \setminus \neg p) \vee \neg p$, dostáváme $u(C_2 \setminus \neg p) = 1$. Proto $u(D) = 1$.

Ukázali jsme, že resolventa D je pravdivá v ohodnocení u.

1.8.7 Věta. Máme dánu množinu klauzulí S a označme D resolventu některých dvou klauzulí z množiny S. Pak množiny S a $S \cup \{D\}$ jsou pravdivé ve stejných ohodnocení. □

Jedná se o důsledek předchozího tvrzení. Jestliže v nějakém ohodnocení u je pravdivá množina $\{C_1, C_2, D\}$, tak je v něm pravdivá i množina $\{C_1, C_2\}$. Předpokládejme tedy, že množina $\{C_1, C_2\}$ je pravdivá v ohodnocení u. Protože D je sémantický důsledek množiny $\{C_1, C_2\}$, je D pravdivé v u. To ale znamená, že v u je pravdivá množina $\{C_1, C_2, D\}$.

1.8.8 Rezoluční princip. Je dána množina klauzulí S. Označme

$$R(S) = S \cup \{D \mid D \text{ je resolventa některých klauzulí z } S\}$$

Definujme

$$\begin{aligned} R^0(S) &= S \\ R^{i+1}(S) &= R(R^i(S)) \quad \text{pro} \quad i \in \mathbb{N} \\ R^\star(S) &= \bigcup \{R^i(S) \mid i \geq 0\}. \end{aligned}$$

Je-li množina S konečná (obsahuje-li S jen konečně mnoho logických proměnných), pak pro výpočet $R^\star(S)$ nemusíme spočítat „nekonečně mnoho“ množin $R^n(S)$. Je to proto, že pro konečnou množinu logických proměnných existuje jen konečně mnoho klauzulí, které můžeme přidat. Musí tedy existovat n takové, že $R^n(S) = R^{n+1}(S)$. Pro toto n platí $R^n(S) = R^\star(S)$.

1.8.9 Věta (Rezoluční princip.) Konečná množina klauzulí S je splnitelná právě tehdy, když $R^\star(S)$ neobsahuje prázdnou klauzuli $\mathbf{F}$. □

1.8.10 Základní postup. Předchozí věta dává návod, jak zjistit, zda daná konečná množina klauzulí je splnitelná nebo je nesplnitelná:

1. Ke každé formuli φ z množiny M najdeme tautologicky ekvivalentní formuli α_φ v CNF. Množinu M pak nahradíme množinou S všech klauzulí vyskytujících se v některé formuli α_φ. Klauzule, které jsou tautologiemi, vynecháme. Jestliže nám nezbude žádná klauzule, množina M se skládala z tautologií a je splnitelná (dokonce pravdivá v každém pravdivostním ohodnocení).
2. Vytvoříme množinu $R^\star(S)$.
3. Obsahuje-li $R^\star(S)$ prázdnou klauzuli, je množina S (a tedy i množina M) nesplnitelná, v opačném případě jsou S a M splnitelné.

Je zřejmé, že konstrukce celé množiny $R^\star(S)$ může být náročná a též zbytečná — stačí pouze zjistit, zda $R^\star(S)$ obsahuje $\mathbf{F}$.

1.8.11 Výhodnější postup – rezoluční algoritmus. Existuje ještě jeden postup, jak využít rezoluční metodu. Ten je jednodušší a nejen odpoví na otázku, zda konečná množina klauzulí S je splnitelná nebo nesplnitelná, ale umožní nám v případě splnitelnosti množiny sestrojit aspoň jedno pravdivostní ohodnocení, v němž je množina S pravdivá. Základní princip postupu spočívá v tom, že k dané množině klauzulí S s k logickými proměnnými zkonstruujeme novou množinu klauzulí S_1, která má o jednu logickou proměnnou méně a platí, že S je splnitelná právě tehdy, když S_1 je splnitelná. To děláme tak dlouho, dokud buď nedostaneme jako resolventu prázdnou klauzuli (výchozí množina klauzulí je nesplnitelná), nebo nedostaneme prázdnou množinu klauzulí (výchozí množina klauzulí je splnitelná).

Jeden krok postupu je tento: Máme konečnou neprázdnou množinu klauzulí S, kde žádná klauzule není tautologie. Vybereme jednu logickou proměnnou (označme ji x), která se v některé z klauzulí z S vyskytuje.

Najdeme množinu klauzulí S_1 s těmito vlastnostmi:

1. Žádná klauzule v S_1 neobsahuje logickou proměnnou x.
2. Množina S_1 je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S.

Množinu S_1 vytvoříme takto: Rozdělíme klauzule množiny S do tří skupin:

M_0 se skládá ze všech klauzulí množiny S, které neobsahují logickou proměnnou x.

M_x se skládá ze všech klauzulí množiny S, které obsahují literál x.

$M_{\neg x}$ se skládá ze všech klauzulí množiny S, které obsahují literál $\neg x$.

Označme N množinu všech resolvent klauzulí množiny S podle logické proměnné x (tj. resolvent vždy jedné klauzule z množiny M_x s jednou klauzulí z množiny $M_{\neg x}$), které nejsou tautologie.

Položíme $S_1 = M_0 \cup N$.

1.8.12 Tvrzení. Množina klauzulí S_1 zkonstruovaná výše je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S. ☐

Důkaz tohoto tvrzení uvedeme později, viz. 1.8.18.

1.8.13 Uvědomte si, že množina S_1 obsahuje o jednu logickou proměnnou méně než množina S: Klauzule z množiny M_0 logickou proměnnou x neobsahují a to samé platí klauzule z N — resolventy podle logické proměnné x. Navíc, množina S je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S_1.

Nyní opakujeme postup pro množinu S_1. Postup skončí jedním ze dvou možných způsobů:

1. Při vytváření resolvent dostaneme prázdnou klauzuli **F**. Tedy S je nesplnitelná.
2. Dostaneme prázdnou množinu klauzulí. V tomto případě je S splnitelná, protože prázdná množina formulí je splnitelná.

1.8.14 Je výhodné předchozí postup znázorňovat v tabulce. Na začátku práce utvoříme tabulku, která obsahuje pro každou klauzuli množiny S jeden sloupec. V prvním řádku vybereme jednu proměnnou, řekněme x, a řádek označíme x. Procházíme neoznačené sloupce tabulky. Jestliže klauzule odpovídající sloupci neobsahuje proměnnou x, sloupec přeskočíme. Jestliže klauzule sloupce obsahuje literál x (tj. klauzule patří do množiny M_x), napíšeme do sloupce 1. Jestliže klauzule odpovídající dosud neoznačenému sloupci obsahuje literál $\neg x$ (tj. patří do množiny $M_{\neg x}$), napíšeme do sloupce 0.

Vybereme libovolnou klauzuli C_1, která má v řádku proměnné x znak 1, a libovolnou klauzuli C_2, která má v řádku 0. Sloupec pro jejich resolventu podle x přidáme v případě, že se jedná o novou klauzuli, která není tautologie (tj. přidáváme sloupce pro nové klauzule z množiny N). Jestliže žádný sloupec není v řádku označen 1 ($M_x = \emptyset$) nebo žádný sloupec není v řádku označen 0 ($M_{\neg x} = \emptyset$), nepřidáváme nic.

Jestliže jsme přidali prázdnou klauzuli, výpočet končí, množina S je nesplnitelná. Jestliže každý sloupec již má 1 nebo 0, výpočet ukončíme, množina S je splnitelná.

Tím jsme ukončili první krok.

Ve druhém kroku se zajímáme jen o sloupce tabulky, které nemají ještě ani číslo 1 ani 0 (tyto sloupce tvoří množinu S_1). Opět vybereme proměnnou, která se v některé ze zbylých klauzulí vyskytuje. Postupujeme dále jako v kroku 1.

Celý postup tedy končí buď přidáním prázdné klauzule, v tom případě je množina S nesplnitelná, nebo vyčerpáním neoznačených sloupců, v tomto případě je množina S splnitelná.

Je-li množina S splnitelná, tak jedno pravdivostní ohodnocení, ve kterém je množina S pravdivá, dostaneme zpětným postupem v tabulce (příklad je uveden v **??**].

1.8.15 Příklad. Pomocí rezoluční metody rozhodněte, zda množina klauzulí

$$S = \{x \vee y \vee \neg z, \neg x, x \vee y \vee z, x \vee \neg y, z \ \vee t \vee v, \neg t \vee w\}$$

je splnitelná. Je-li splnitelná, najděte pravdivostní ohodnocení, ve kterém je S pravdivá.

Řešení. Postup si znázorníme v následující tabulce 1.1. Tabulka má jeden sloupec pro každou klauzuli množiny S.

	$x \vee y \vee \neg z$	$\neg x$	$x \vee y \vee z$	$x \vee \neg y$	$z \vee t \vee v$	$\neg t \vee w$					
y:	1		1	0			$x \vee \neg z$	$x \vee z$			
x:		0					1	1	$\neg z$	z	
z:					1				0	1	**F**

Tabulka 1.1: Tabulka pro rezoluční metodu

Nejprve odstraníme logickou proměnnou y: První řádek tabulky je označen y. Nyní v tomto řádku napíšeme do sloupce 1, jestliže daná klauzule obsahuje literál y, a napíšeme 0, jestliže odpovídající klauzule obsahuje literál $\neg y$. Jestliže daná klauzule neobsahuje proměnnou y, do sloupce nepíšeme nic. K tabulce přidáme za každou resolventu podle proměnné y, která není tautologie, další sloupec odpovídající této resolventě. Jsou to sloupce odpovídající klauzulím:

$$x \vee \neg z \ = res_y(x \vee y \vee \neg z, x \vee \neg y) \quad \text{a} \quad x \vee z \ = res_y(x \vee y \vee z, x \vee \neg y).$$

Množina S_1 se skládá ze všech klauzulí, jejichž sloupce nejsou označeny, tj. neobsahují ani 1, ani 0. Máme

$$S_1 = \{\neg x, z \ \vee t \vee v, \neg t \vee w, x \vee \neg z, x \vee z\}.$$

V dalším kroku vybereme další logickou proměnnou, např. x, a postupuje obdobně jako v kroku 1. Dostaneme množinu klauzulí S_2 (která již neobsahuje ani logickou proměnnou y, ani x):

$$S_2 = \{z \vee t \vee v, \neg t \vee w, \neg z, z\}.$$

Uvědomte si, že platí: množina S je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S_2.

Dále vybereme logickou proměnnou z. Protože devátý sloupec odpovídá klauzuli z a desátý klauzuli $\neg z$, je jejich resolventa prázdná klauzule **F**. Tím jsme ukázali, že množina S_2 je nesplnitelná a proto jsou nesplnitelné i množiny klauzulí S_1 a S. Tedy odpověď je: S je nesplnitelná.