Kapitola 2

Predikátová logika

Ne všechny logicky správné úsudky se dají zachytit/zdůvodnit výrokovou logikou. Např. z pravdivosti vět: *Následník sudého čísla je číslo liché. Číslo 3 je následník čísla 2. Číslo 2 je sudé.* vyplývá tvrzení *Číslo 3 je liché.*

Takovýto úsudek v predikátové logice zdůvodnit lze.

2.1 Syntaxe predikátové logiky

Nejprve zavedeme syntaxi predikátové logiky, tj. uvedeme pravidla, podle nichž se tvoří syntakticky správné formule predikátové logiky. Význam a pravdivostní hodnota nás bude zajímat až dále.

Správně utvořené formule budou řetězce (posloupnosti) symbolů tzv. *jazyka predikátové logiky.*

2.1.1 Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$. *Jazyk predikátové logiky* se skládá z

1. *logických symbolů*, tj.:

   a) spočetné množiny individuálních proměnných: $\mathsf{Var} = \{x, y, \dots, x_1, x_2, \dots\}$

   b) výrokových logických spojek: $\mathbf{T}$, $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \mathbf{F}$

   c) obecného kvantifikátoru $\forall$ a existenčního kvantifikátoru $\exists$

2. *speciálních symbolů*, tj. po dvou disjunktních množin Pred, Kons a Func, kde

   a) Pred je množina predikátových symbolů (není prázdná)

   b) Konsje množina konstantních symbolů (může být prázdná)

   c) Func je množina funkčních symbolů

3. pomocných symbolů, jako jsou závorky „(, [,) ,]“ a čárka „,“

Pro každý predikátový i funkční symbol máme dáno přirozené číslo n, které udává kolika objektů se daný predikát týká, nebo kolik proměnných funkční symbol má. Tomuto číslu říkáme *arita* nebo též *četnost* predikátového symbolu nebo funkčního symbolu. Funkční symboly mají aritu větší nebo rovnu 1, predikátové symboly připouštíme i arity 0. □

2.1.2 Poznámka. Predikátové symboly budeme většinou značit velkými písmeny, tj. např. $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$; konstantní symboly malými písmeny ze začátku abecedy, tj. $a, b, c, \dots, a_1, \dots$, a funkční symboly většinou $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$. Formule predikátové logiky budeme označovat malými řeckými písmeny (obdobně, jako jsme to dělali pro výrokové formule). Kdykoli se od těchto konvencí odchýlíme, tak na to v textu upozorníme.

Poznamenejme, že přestože často budeme mluvit o n-árních predikátových symbolech a n-árních funkčních symbolech, v běžné praxi se setkáme jak s predikáty, tak funkcemi arity nejvýše tři. Nejběžnější jsou predikáty a funkční symboly arity 1, těm říkáme též *unární*, nebo arity 2, těm říkáme též *binární*.

Predikátové symboly arity 0 představují nestrukturované výroky (netýkají se žádného objektu). Tímto způsobem se v predikátové logice dá popsat i výrok: „Prší".

Poznamenejme ještě, že někteří autoři konstantní symboly zahrnují pod nulární funkční symboly (tj. funkční symboly arity 0).

2.1.3 Termy.

Definice. Množina *termů* je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.
2. Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je také term.
3. Nic, co nevzniklo konečným použitím pravidel 1 a 2, není term.

□

2.1.4 Poznámka. Term je zhruba řečeno objekt, pouze může být složitěji popsán než jen proměnnou nebo konstantou. V jazyce predikátové logiky termy vystupují jako „podstatná jména".

2.1.5 Atomické formule.

Definice. *Atomická formule* je řetězec $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, kde $P \in \mathsf{Pred}$ kladné arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ je n-tice termů, nebo je řetězec P, kde $P \in \mathsf{Pred}$ je predikátový symbol arity 0. □

Jinými slovy, atomická formule je buď predikátový symbol arity 0, nebo predikátový symbol kladné arity aplikovaný na tolik termů, kolik je jeho arita.

2.1.6 Formule.

Definice. Množina *formulí* je definována těmito pravidly:

1. Každá atomická formule je formule.
2. **F** je formule a jsou-li φ a ψ dvě formule, pak $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou opět formule.
3. Je-li φ formule a x proměnná, pak $(\forall x\, \varphi)$ a $(\exists x\, \varphi)$ jsou opět formule.
4. Nic, co nevzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 až 3, není formule.

□

2.1.7 Poznámka. Formule predikátové logiky jsme definovali obdobně jako výrokové formule: Nejprve definujeme „ty nejjednodušší" formule (atomické formule) a potom pomocí logických spojek a kvantifikátorů konstruujeme složitější formule. Ve výrokové logice byl první krok daleko jednodušší, protože atomické výroky (logické proměnné) nebyly strukturované. Vlastní konstrukce formulí je však v obou případech podobná.

2.1.8 Konvence.

1. Úplně vnější závorky formule nepíšeme. Píšeme tedy např. $(\exists x\, P(x)) \vee R(a,b)$ místo $((\exists x\, P(x)) \vee R(a,b))$.

2. Spojka „negace“ má vždy přednost před výrokovými logickými spojkami a proto píšeme např. $\forall x\, (\neg P(x) \Rightarrow Q(x))$ místo $\forall x\, ((\neg P(x)) \Rightarrow Q(x))$.

2.1.9 Syntaktický strom formule. Ke každé formuli predikátové logiky můžeme přiřadit její *syntaktický strom* (někdy nazývaný *derivační strom*) podobným způsobem jako jsme to udělali v případě výrokových formulí. Rozdíl je v tom, že kvantifikátory považujeme za unární (tj. mají pouze jednoho následníka), a také pro termy vytváříme jejich syntaktický strom. Listy syntaktického stromu jsou vždy ohodnoceny proměnnou, konstantou, predikátovým symbolem arity 0 nebo $\mathbf{F}$.

2.1.10 Podformule.

Definice. *Podformule* formule φ je libovolný podřetězec φ, který je sám formulí. Jinými slovy: Podformule formule φ je každý řetězec odpovídající podstromu syntaktického stromu formule φ, určenému vrcholem ohodnoceným predikátovým symbolem, logickou spojkou nebo kvantifikátorem. $\square$

2.1.11 Volný a vázaný výskyt proměnné.

Definice. Máme formuli φ a její syntaktický strom. List syntaktického stromu obsazený proměnnou x je *výskyt proměnné x* ve formuli φ.

Výskyt proměnné x je *vázaný* ve formuli φ, jestliže při postupu od listu ohodnoceného tímto x ve směru ke kořeni syntaktického stromu narazíme na kvantifikátor s touto proměnnou. V opačném případě mluvíme o *volném* výskytu proměnné x. $\square$

2.1.12 Sentence, otevřená formule.

Definice. Formule, která má pouze vázané výskyty proměnné, se nazývá *sentence*, též *uzavřená formule.*

Formuli, která má pouze volné výskyty proměnné, se říká *otevřená formule.* $\square$

2.1.13 Legální přejmenování proměnné. Přejmenování výskytů proměnné x ve formuli φ je *legálním* přejmenováním proměnné, jestliže

- se jedná o výskyt vázané proměnné ve φ;
- přejmenováváme všechny výskyty x vázané daným kvantifikátorem;
- po přejmenování se žádný dříve volný výskyt proměnné nesmí stát vázaným výskytem.

$\square$

2.1.14 Rovnost formulí.

Definice. Dvě formule považujeme za *stejné*, jestliže se liší pouze legálním přejmenováním vázaných proměnných. $\square$

Každou formuli φ lze napsat tak, že každá proměnná má ve formuli buď jen volné výskyty nebo jen vázané výskyty. Takovým formulím se tadé říká *formule s čistými proměnnými.*