2.2 Sémantika predikátové logiky

Nyní se budeme zabývat sémantikou formulí, tj. jejich významem a pravdivostí.

2.2.1 Interpretace jazyka predikátové logiky.

Definice. *Interpretace* predikátové logiky s predikátovými symboly Pred, konstantními symboly Kons a funkčními symboly Func je dvojice $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, kde

- U je neprázdná množina nazývaná *universum*;
- $[\![-]\!]$ je přiřazení, které
  1. každému predikátovému symbolu $P \in \mathsf{Pred}$ arity $n > 0$ přiřazuje podmnožinu $[\![P]\!]$ množiny U^n, tj. n-ární relaci na množině U, každému predikátovému symbolu P arity 0 přiřazuje buď 0 nebo 1.
  2. každému konstantnímu symbolu $a \in \mathsf{Kons}$ přiřazuje prvek z U, značíme jej $[\![a]\!]$,
  3. každému funkčnímu symbolu $f \in \mathsf{Func}$ arity n přiřazuje zobrazení množiny U^n do U, značíme je $[\![f]\!]$.

$\square$

Množina U se někdy nazývá *domain* a označuje D.

2.2.2 Kontext proměnných, update kontextu proměnných.

Definice. Je dána interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$. *Kontext proměnných* je zobrazení ρ, které každé proměnné $x \in \mathsf{Var}$ přiřadí prvek $\rho(x) \in U$.

Je-li ρ kontext proměnných, $x \in \mathsf{Var}$ a $d \in U$, pak

$$\rho[x := d]$$

označuje kontext proměnných, který má stejné hodnoty jako ρ, a liší se pouze v proměnné x, kde má hodnotu d. Kontextu proměnných $\rho[x := d]$ též říkáme *update* kontextu ρ o hodnotu d v x. $\square$

2.2.3 Interpretace termů při daném kontextu proměnných.

Definice. Je dána interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a kontext proměnných ρ. Pak termy interpretujeme následujícím způsobem.

1. Je-li term konstantní symbol $a \in \mathsf{Kons}$, pak jeho hodnota je prvek $[\![a]\!]_\rho = [\![a]\!]$. Je-li term proměnná x, pak jeho hodnota je $[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$.
2. Je-li $f(t_1, \dots, t_n)$ term, pak jeho hodnota je
$$[\![f(t_1, \dots, t_n)]\!]_\rho = [\![f]\!]([\![t_1]\!]_\rho, \dots, [\![t_n]\!]_\rho).$$
(Jinými slovy, hodnotu termu $f(t_1, \dots, t_n)$ získáme tak, že funkci $[\![f]\!]$ provedeme na n-tici prvků $[\![t_1]\!]_\rho, \dots, [\![t_n]\!]_\rho$ z U.)

$\square$

Poznamenejme, že neobsahuje-li term t proměnnou, pak jeho hodnota nezáleží na kontextu proměnných ρ, ale pouze na interpretaci.

Tuto formální definici si můžete přiblížit ještě takto. Vezmeme term t a utvoříme jeho syntaktický strom. Listy stromu ohodnotíme tak, jak nám říká interpretace (pro konstantní symboly) a kontext proměnných (pro proměnné). Pak jdeme v syntaktickém stromu směrem ke kořeni. Vrchol, který odpovídá n-árnímu funkčnímu symbolu f a má následníky ohodnoceny prvky d_1, d_2, ..., d_n (v tomto pořadí zleva doprava), ohodnotíme prvkem $[\![f]\!](d_1, \dots, d_n)$, tj. obrazem n-tice $(d_1, \dots, d_n)$ v zobrazení $[\![f]\!]$. Prvek, kterým je ohodnocen kořen, je hodnota celého termu v dané interpretaci a daném kontextu. Uvědomte si, že se jedná o přesně stejný postup jako např. při vyhodnocování algebraických výrazů.

2.2.4 Pravdivostní hodnota formule v dané interpretaci a daném kontextu.

Nejprve definujeme *pravdivost formulí v dané interpretaci* $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ *při daném kontextu proměnných* ρ:

1. Je dána atomická formule $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$, kde P je predikátový symbol arity $n > 0$ a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy. Pak φ je pravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a kontextu ρ právě tehdy, když
$$([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho) \in [\![P]\!].$$
(Jinými slovy: φ je v naší interpretaci a kontextu proměnných pravdivá právě tehdy, když n-tice hodnot termů $([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho)$ má vlastnost $[\![P]\!]$.) Je-li P predikát arity 0, pak $\varphi = P$ je pravdivá právě tehdy, když $[\![(]\!]P) \neq \emptyset$.

2. Jsou-li φ a ψ formule, jejichž pravdivost v interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a kontextu ρ již známe, pak

   - **F** je nepravdivá.
   - $\neg\varphi$ je pravdivá právě tehdy, když φ není pravdivá.
   - $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou pravdivé.
   - $\varphi \vee \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou nepravdivé.
   - $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ je pravdivá a ψ je nepravdivá.
   - $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule φ a ψ jsou pravdivé, nebo obě formule φ a ψ jsou nepravdivé.

3. Je-li φ formule a x proměnná, pak

   - $\forall x\ \varphi(x)$ je pravdivá právě tehdy, když formule φ je pravdivá *v každém* kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U.
   - $\exists x\ \varphi(x)$ je pravdivá právě tehdy, když formule φ je pravdivá *v aspoň jednom* kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U.

□

2.2.5 Pravdivostní hodnota sentence.

Definice. Sentence φ je *pravdivá v interpretaci* $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, jestliže je pravdivá v každém kontextu proměnných ρ. □

Poznamenejme, že pro sentence jsme v předchozí definici mohli požadovat pravdivost v alespoň jednom kontextu.

2.2.6 Model sentence.

Definice. Interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, ve které je sentence φ pravdivá, se nazývá *model sentence* φ. □

2.2.7 Tautologie, kontradikce, splnitelná sentence.

Definice.

- Sentence φ se nazývá *tautologie*, jestliže je pravdivá v každé interpretaci.
- Sentence se nazývá *kontradikce*, jestliže je nepravdivá v každé interpretaci.
- Sentence se nazývá *splnitelná*, jestliže je pravdivá v aspoň jedné interpretaci.

□

Předchozí definice jsme také mohli definovat pomocí pojmu „model“. Tautologie je sentence, pro kterou je každá interpretace jejím modelem; sentence je splnitelná, má-li model; sentence je kontradikce, nemá-li model.

2.2.8 Příklady. Následující sentence jsou tautologie. (P je unární predikátový symbol, Q je binární predikátový symbol a a je konstantní symbol.)

1. $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow P(a)$;
2. $P(a) \Rightarrow (\exists x\, P(x))$;
3. $\neg(\forall x\, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x\, \neg P(x))$;
4. $\neg(\exists x\, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x\, \neg P(x))$;
5. $(\forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y\, \forall x\, Q(x,y))$;
6. $(\exists x\, \exists y\, Q(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y\, \exists x\, Q(x,y))$.

2.2.9 Následující sentence jsou splnitelné formule:

1. $\forall x\, \exists y\, Q(x,y)$,
2. $\forall x\, \forall y\, (x + y = y + x)$,

kde Q a $=$ jsou binární predikátové symboly, $+$ je binární funkční symbol. (Upozorňujeme, že místo zápisu $=(t_1, t_2)$ a $+(x, y)$ používáme čitelnější zápis $t_1 = t_2$ a $x + y$.)

Uvědomte si, že i když funkční symbol značíme $+$, jeho interpretace může být libovolná binární operace na množině U; tedy ne nutně komutativní. Interpretací, ve které je třetí sentence pravdivá, je každá neprázdná množina spolu se symetrickou binární relací.

2.2.10 Zvláštní příklady kontradikcí neuvádíme. Kontradikce jsou přesně ty formule, jejichž negace jsou tautologie. Tak např. formule $(\forall x\, P(x) \wedge \neg(\forall x\, P(x))$ je kontradikce. Je dobré si uvědomit, že jde o „dosazení“ formule $\forall x\, P(x)$ do výrokové kontradikce $p \wedge \neg p$.

2.2.11 Splnitelné množiny sentencí.

Definice. Množina sentencí M je *splnitelná*, jestliže existuje interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž jsou všechny sentence z M pravdivé. Takové interpretaci pak říkáme *model* množiny sentencí M.

Množina sentencí M je *nesplnitelná*, jestliže ke každé interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ existuje formule z M, která je v $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ nepravdivá, tj. nemá model. □

Z poslední definice vyplývá, že prázdná množina sentencí je splnitelná. (Porovnejte s výrokovou logikou.)

2.3 Tautologická ekvivalence

Obdobně jako ve výrokové logice zavádíme i v predikátové logice pojem *tautologicky ekvivalence*. V predikátové logice ale pouze pro sentence, tedy formule bez volných výskytů proměnných.

2.3.1 Tautologická ekvivalence sentencí.

Definice. Řekneme, že dvě sentence φ a ψ jsou *tautologicky ekvivalentní*, jestliže mají stejné modely, tj. jsou pravdivé ve stejných interpretacích. Tento fakt značíme $\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$. □

Někdy se též říká, že sentence jsou *sémanticky* ekvivalentní místo, že jsou tautologicky ekvivalentní.

2.3.2 Poznámka. Dá se jednoduše dokázat, že tautologická ekvivalence je relace ekvivalence na množině všech sentencí daného jazyka $\mathcal{L}$ a že má podobné vlastnosti jako tautologická ekvivalence formulí výrokové logiky.

2.3.3 Tvrzení. Nechť φ a ψ jsou sentence. Pak platí:

$$\varphi \models\!\mid \psi \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varphi \Leftrightarrow \psi \text{ je tautologie.}$$

□

2.3.4 Poznámka. Ze známých tautologií dostáváme následující tautologické ekvivalence

1. $\neg(\forall x\, P(x)) \models\!\mid (\exists x\, \neg P(x))$,
2. $\neg(\exists x\, P(x)) \models\!\mid (\forall x\, \neg P(x))$,
3. $\forall x\, \forall y\, Q(x, y) \models\!\mid \forall y\, \forall x\, Q(x, y)$,
4. $\exists x\, \exists y\, Q(x, y) \models\!\mid \exists y\, \exists x\, Q(x, y)$.

2.3.5 Tvrzení. Platí, že následující sentence jsou tautologicky ekvivalentní (P a Q jsou unární predikátové symboly).

1. $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)) \models\!\mid \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$;
2. $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x)) \models\!\mid \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$;
3. $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall y\, Q(y)) \models\!\mid \forall x\, \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$;
4. $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists y\, Q(y)) \models\!\mid \exists x\, \exists y\, (P(x) \wedge Q(y))$.

□