2.4 Sémantický důsledek

Obdobně jako ve výrokové logice definujeme i v predikátové logice pojem *sémantický důsledek* (též *konsekvent*, *tautologický důsledek*); tentokrát však jen pro množiny sentencí.

2.4.1 Sémantický důsledek.

Definice. Je dána množina sentencí S a sentence φ. Řekneme, že φ je *sémantickým důsledkem*, též *konsekventem*, množiny S, jestliže každý model množiny S je také modelem sentence φ. Tento fakt značíme $S \models \varphi$. $\square$

Můžeme též říci, že sentence φ *není* konsekventem množiny sentencí S, jestliže existuje model množiny S, který není modelem sentence φ. To znamená, že existuje interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž je pravdivá každá sentence z množiny S a není pravdivá sentence φ. Jedná se tedy o obdobný pojem jako ve výrokové logice, „pouze“ místo o pravdivostním ohodnocení mluvíme o interpretaci. (Je dobré si ale uvědomit, že mezi pojmy pravdivostní ohodnocení a interpretace je podstatný rozdíl — např. to, že pro interpretace neexistuje nic obdobného pravdivostním tabulkám.)

2.4.2 Konvence. Jestliže množina sentencí S je jednoprvková, tj. $S = \{\psi\}$, pak píšeme $\psi \models \varphi$ místo $\{\psi\} \models \varphi$. Je-li množina S prázdná, píšeme $\models \varphi$ místo $\emptyset \models \varphi$.

2.4.3 Příklady. Jsou-li P a Q unární predikátové symboly a R binární predikátový symbol, pak

1. $\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(x)$.

   Zdůvodnění: Jestliže všechny objekty z daného universa mají vlastnost odpovídající predikátovému symbolu P, pak existuje alespoň jeden objekt, který tuto vlastnost má. (Uvědomte si, že $\exists x\, P(x)$ je sémantickým důsledkem sentence $\forall x\, P(x)$ z toho důvodu, že universum U interpretace nikdy není prázdná množina.)

2. $\exists x\, P(x) \not\models \forall x\, P(x)$.

   Zdůvodnění: Není těžké najít interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, ve které je pravdivá sentence $\exists x\, P(x)$ a sentence $\forall x\, P(x)$ pravdivá není. Položme např. $U = \mathbf{N}$, tj. naše objekty jsou přirozená čísla, a vlastnost P je vlastnost býti sudým číslem, tj. $[\![P]\!]$ je množina sudých přirozených čísel. V této interpretaci je sentence $\exists x\, P(x)$ pravdivá (např. číslo 2 je sudé), ale $\forall x\, P(x)$ pravdivá není (např. číslo 3 není sudé).

3. $\{\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x)), \exists x\, P(x)\} \models \exists x\, Q(x)$.

   Zdůvodnění: Jestliže v nějaké interpretaci existuje objekt, který má vlastnost odpovídající predikátovému symbolu P, pak z pravdivosti implikace $\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ tento objekt musí mít vlastnost odpovídající predikátovému Q. Pravdivost sentence $\exists x\, P(x)$ zaručuje, že stejný objekt, který má vlastnost odpovídající P, má i vlastnost odpovídající Q.

4. $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \models \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$.

   Zdůvodnění: Sentence $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$ a sentence $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall y\, Q(y))$ jsou stejné (liší se pouze legálním přejmenováním vázané proměnné x na y), budeme tedy pracovat s ní.

   Sentence $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall y\, Q(y))$ je pravdivá v každé interpretaci, ve které všechny objekty mají vlastnost odpovídající P nebo všechny objekty mají vlastnost odpovídající Q (nebo obě vlastnosti). To ale znamená, že každý z objektů má aspoň jednu z vlastností odpovídající P a Q. Tedy sentence $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$ je pravdivá.

5. $(\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\models (\forall x\, (P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$.

Zdůvodnění: Není těžké najít interpretaci, ve které je pravdivá sentence $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$, tj. každý objekt této interpretace má aspoň jednu z vlastností odpovídajících P a Q, a přitom některé objekty mají jen P a některé jen Q. Tudíž není pravdivé, že všechny objekty mají vlastnost odpovídající P nebo všechny objekty mají vlastnost odpovídající Q; proto sentence $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ je nepravdivá. Uvedeme konkrétní interpretaci, ve které je sentence $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ pravdivá, ale sentence $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ nepravdivá.

Uvažujme interpretaci, kde U je množina přirozených čísel, vlastnost odpovídající P je vlastnost být sudým číslem, vlastnost odpovídající Q je vlastnost být lichým číslem. Pak platí, že každé přirozené číslo je sudé nebo liché, ale neplatí, že by všechna přirozená čísla byla sudá nebo že by všechna přirozená čísla byla lichá.

6. $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall y\,Q(y)) \models \forall x\,\forall y\,(P(x) \vee Q(y))$.

   Zdůvodnění: Nejprve označme
   $$\alpha = (\forall x\,P(x)) \vee (\forall y\,Q(y)) \quad \text{a} \quad \beta = \forall x\,\forall y\,(P(x) \vee Q(y)).$$

   Zdůvodnění tohoto tvrzení je trochu obtížnější. Půjdeme na to tak, že ukážeme, že není-li sentence β pravdivá, není pravdivá ani sentence α. Tím bude tvrzení z příkladu 6) dokázáno.

   Fakt, že sentence β je pravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ znamená toto: vybereme-li libovolnou dvojici objektů $c, d \in U$, pak objekt c má vlastnost $[\![P]\!]$ nebo objekt d má vlastnost $[\![Q]\!]$. Předpokládejme tedy, že sentence β není pravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$. To znamená, že máme (aspoň) jednu dvojici $c, d \in U$ takovou, že c nemá vlastnost $[\![P]\!]$ a d nemá vlastnost $[\![Q]\!]$. Pak ale nemůže být pravdivá ani sentence $\forall x\,P(x)$ (c nemá vlastnost $[\![P]\!]$), ani sentence $\forall y\,Q(y)$ (d nemá vlastnost $[\![Q]\!]$). Proto je nepravdivá i sentence α.

7. $\exists x\,\forall y\,R(x,y) \models \forall y\,\exists x\,R(x,y)$.

   Zdůvodnění: Sentence $\exists x\,\forall y\,R(x,y)$ je pravdivá ve všech interpretacích, ve kterých existuje prvek $c \in U$ takový, že c s každým prvkem $d \in U$ má vlastnost odpovídající R, tj. $(c,d) \in [\![R]\!]$. Pak je však pravdivá i sentence $\forall y\,\exists x\,R(x,y)$, protože pro libovolné $d \in U$ můžeme do proměnné x dosadit prvek c.

8. $\forall x\,\exists y\,R(x,y) \not\models \exists y\,\forall x\,R(x,y)$.

   Zdůvodnění: Najdeme lehce interpretaci, ve které je sentence $\forall y\,\exists x\,R(x,y)$ pravdivá, ale sentence $\forall x\,\exists y\,R(x,y)$ nikoli:

   Jako U zvolíme množinu všech přirozených čísel a predikát $R(x,y)$ interpretujeme jako $x < y$. (Tj. $[\![R]\!]$ je množina všech uspořádaných dvojic (m,n), kde $m < n$.) Pak sentence $\forall x\,\exists y\,R(x,y)$ je pravdivá, protože opravdu pro každé přirozené číslo n existuje číslo větší, např. $n+1$. Sentence $\exists y\,\forall x\,R(x,y)$ pravdivá v této interpretaci není; její pravdivost by znamenala, že bychom museli mít největší přirozené číslo (a to by ještě muselo být větší než ono samo) a takové číslo neexistuje.

2.4.4 Obdobně jako pro výrokovou logiku, dostáváme řadu jednoduchých pozorování.

Tvrzení. Pro množiny sentencí M, N a sentenci φ platí:

1. Je-li $\varphi \in M$, je $M \models \varphi$.
2. Je-li φ tautologie, pak $M \models \varphi$ pro každou množinu sentencí M.
3. Je-li $\models \varphi$, pak φ je tautologie.
4. Je-li M nesplnitelná množina, pak platí $M \models \varphi$ pro každou sentenci φ.

5. Je-li $N \subseteq M$ a platí $N \models \varphi$, pak platí i $M \models \varphi$.
6. Je-li φ konsekventem množiny sentencí $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ a každá sentence α_i je konsekventem množiny sentencí M, pak φ je konsekventem M.
7. Jestliže $M \models \alpha$ i $M \models \neg\alpha$ pro nějakou sentenci α, pak M je nesplnitelná množina sentencí.

□

2.4.5 Tvrzení. Nechť φ a ψ jsou sentence. Pak platí:

$$\varphi \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv \psi \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varphi \models \psi \ \text{ a } \ \psi \models \varphi.$$

□

Ano, oboje znamená, že sentence φ a ψ mají stejné modely.

2.4.6 Tvrzení. Nechť φ a ψ jsou sentence. Pak platí:

$$\varphi \models \psi \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varphi \Rightarrow \psi \quad \text{je tautologie.}$$

□

Ano, oboje znamená, že neexistuje interpretace, která by byla modelem φ a nebyla modelem ψ.

2.4.7 Věta. Pro každou množinu sentencí S a každou sentenci φ platí:

$$S \models \varphi \quad \text{právě tehdy, když} \quad S \cup \{\neg\varphi\} \quad \text{je nesplnitelná množina.}$$

□

Zdůvodnění je stejné jako ve výrokové logice (viz z **??**), pouze místo o pravdivostním ohodnocení mluvíme o interpretacích.

2.5 Rezoluční metoda v predikátové logice

Rezoluční metoda v predikátové logice je obdobná stejnojmenné metodě ve výrokové logice. Ovšem vzhledem k bohatší vnitřní struktuře formulí predikátové logiky je složitější. Používá se v logickém programování a je základem programovacího jazyka Prolog. Postupujeme obdobně jako ve výrokové logice (je dobré sledovat to, co je společné, i to, co je rozdílné, s rezoluční metodou výrokové logiky).

Nejprve zavedeme literály a klauzule v predikátové logice.

2.5.1 Literál.

Definice. *Literál* je atomická formule (tzv. *pozitivní literál*), nebo negace atomické formule (tzv. *negativní literál*). *Komplementární literály* jsou dva literály, z nichž jeden pozitivní, jeden je negativní a ten negativní je negací pozitivního. □

2.5.2 Klauzule

Definice. *Klauzule* je **sentence** taková, že všechny kvantifikátory jsou obecné, stojí na začátku sentence (na jejich pořadí nezáleží) a za nimi následují literál nebo disjunkce konečně mnoha literálů.

Za klauzuli budeme považovat ještě formuli **F** zastupující kontradikci, kterou budeme nazývat *prázdná klauzule*. □

Ve výrokové logice jsme pro každou formuli α našli k ní tautologicky ekvivalentní množinu klauzulí S_α a to tak, že α i S_α byly pravdivé ve stejných pravdivostních ohodnoceních. Takto jednoduchá situace v predikátové logice není. Ukážeme si nejprve, jak k dané sentenci φ najít množinu klauzulí S_φ a to tak, že φ je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S_φ.

2.5.3 Převedení sentence na . Pro každou sentenci φ existuje množina klauzulí S_φ taková, že sentence φ je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S_φ. (Poznamenejme, že se jedná o obdobu CNF formule pro danou výrokovou formuli.)

2.5.4 Postup. Uvedeme postup, kterým pro danou sentenci φ zkonstruujeme množinu klauzulí S_φ.

1. Přejmenujeme proměnné sentence φ tak, aby každý vstup kvantifikátoru vázal jinou proměnnou. (Tj. např. formuli $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x,a)$ nahradíme formulí $\forall x\, P(x) \vee \forall y\, Q(y,a)$.)
2. Spojky $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ nahradíme spojkami $\neg$, $\vee$ a $\wedge$ na základě známých tautologických rovností
$$\begin{array}{lll} \alpha \Rightarrow \beta & \text{nahradíme} & \neg\alpha \vee \beta \\ \alpha \Leftrightarrow \beta & \text{nahradíme} & (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta) \end{array}$$
3. Přesuneme spojku $\neg$ „co nejníže“ v derivačním stromu formule, tj. až před atomické formule. Použijeme k tomu vztahy
$$\begin{array}{rll} \neg\exists x\, \alpha & \text{nahradíme} & \forall x\, \neg\alpha \\ \neg\forall x\, \alpha & \text{nahradíme} & \exists x\, \neg\alpha \\ \neg(\alpha \vee \beta) & \text{nahradíme} & \neg\alpha \wedge \neg\beta \\ \neg(\alpha \wedge \beta) & \text{nahradíme} & \neg\alpha \vee \neg\beta \\ \neg\neg\alpha & \text{nahradíme} & \alpha \end{array}$$
4. Přesuneme spojku $\vee$ „co nejníže“ v derivačním stromu formule pomocí vztahů
$$\begin{array}{rll} \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \text{nahradíme} & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \\ \alpha \vee (\exists x\, \beta) & \text{nahradíme} & \exists x\, (\alpha \vee \beta) \\ \alpha \vee (\forall x\, \beta) & \text{nahradíme} & \forall x\, (\alpha \vee \beta) \end{array}$$
   Přitom dáváme přednost prvním dvěma rovnostem. Teprve v případě, že ani první, ani druhou rovnost nelze aplikovat, používáme třetí rovnost. Uvědomte si, že třetí rovnost je opravdu tautologická ekvivalence pouze proto, že formule α neobsahuje proměnnou x (viz krok 1).
5. V případě, že formule ψ obsahuje existenční kvantifikátor, provedeme skolemizaci, která je vysvětlena a popsána v dalších odstavcích.
6. Použijeme tautologickou ekvivalenci
$$\forall x\, (\alpha \wedge \beta) \quad \text{nahradíme} \quad (\forall x\, \alpha) \wedge (\forall x\, \beta)$$
   k distribuci obecného kvantifikátoru. Dostali jsme sentenci ψ, která je konjunkcí klauzulí. Sentenci ψ nahradíme množinou jejích klauzulí — a to je hledaná množina S_φ.

2.5.5 Poznámka. Místo abychom skolemizovali až v kroku 5, mohli jsme skolemizaci použít již v kroku 4. V takovém případě bychom nemuseli přesunovat existenční kvantifikátor ve stromě formule „nahoru“ nad logickou spojku $\vee$. **Nesmíme** ale skolemizovat před krokem 3, tj. před přesunutím negace před atomické formule.