2.5.21 Poznámka. Rezoluční princip používáme i pro zjištění, zda z množiny sentencí S vyplývá sentence α (tj. zda $S \models \alpha$) a to takto.

Postupujeme podle věty 2.4.7: **Nejprve** vytvoříme množinu $S \cup \{\neg\alpha\}$ a pak upravujeme sentence této množiny na klauzální tvar; množinu klauzulí, kterou dostaneme, označme M.

Jestliže při vytváření množiny $R^\star(M)$ získáme prázdnou klauzuli, pak množina $S \cup \{\neg\alpha\}$ je nesplnitelná a tvrzení $S \models \alpha$ je pravdivé; jestliže jsme vytvořili celou množinu $R^\star(M)$ a prázdná klauzule do ní nepatří, pak $S \cup \{\neg\alpha\}$ je splnitelná a tvrzení $S \models \alpha$ není pravdivé.

2.5.22 Příklad. Je dána množina tří sentencí

$$S = \{\forall x\, \forall y\, ((P(x) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(y)), \forall x\, Q(f(x), g(x)), P(f(b))\}$$

a sentence $\varphi = R(g(b))$, (zde P je unární predikátový symbol, Q je binární predikátový symbol, f a g jsou binární funkční symboly a b je konstantní symbol).

Rezoluční metodou rozhodněte, zda platí $S \models \varphi$.

Řešení. Nejprve vytvoříme množinu $S \cup \{\neg\varphi\}$, ta je rovna

$$\{\forall x\, \forall y\, ((P(x) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(y)), \forall x\, Q(f(x), g(x)), P(f(b)), \neg R(g(b))\}.$$

Nyní převedeme sentence na klauzální tvar. Přitom přejmenujeme proměnné tak, aby v celé množině každý kvantifikátor vázal jinou proměnnou. (Poslední tři sentence už jsou klauzule.) Dostaneme množinu klauzulí

$$M = \{\forall x\, \forall y\, (\neg P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee R(y)), \forall z\, Q(f(z), g(z)), P(f(b)), \neg R(g(b))\}.$$

Označme jednotlivé klauzule: $K_1 = \forall x\, \forall y\, (\neg P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee R(y))$, $K_2 = \forall z\, Q(f(z), g(z))$, $K_3 = P(f(b))$ a $K_4 = \neg R(g(b))$.

Nejprve utvoříme resolventu klauzulí K_1 a K_3. Abychom resolventu mohli utvořit, za proměnnou x dosadíme term $f(b)$. Dostaneme klauzuli

$$K_1' = \forall y\, (\neg P(f(b)) \vee \neg Q(f(b), y) \vee R(y)).$$

Klauzule K_1' a K_3 obsahují dvojici komplementárních literálů, totiž $\neg P(f(b))$ v K_1' a $P(f(b))$ v K_3. Jejich resolventa je klauzule

$$K_5 = \forall y\, (\neg Q(f(b), y) \vee R(y)).$$

Nyní utvoříme resolventu klauzulí K_4 a K_5. Provedeme substituci: za proměnnou y dosadíme term $f(b)$. Dostaneme klauzule $K_5' = \neg Q(f(b), g(b)) \vee R(g(b))$ a $K_4 = \neg R(g(b))$. Jejich resolventa je klauzule $K_6 = \neg Q(f(b), g(b))$.

Nyní vybereme klauzule K_2 a K_6. Po dosazení konstanty b za proměnnou z, dostáváme klauzule $K_2' = Q(f(b), g(b))$ a $K_6 = \neg Q(f(b), g(b))$, jejichž resolventa je prázdná klauzule $\mathbf{F}$.

Proto je množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ nesplnitelná a $S \models \varphi$ platí. □

Poznamenejme, že jsme nekonstruovali celou množinu $R^\star(S \cup \{\neg\varphi\})$; nebylo to potřeba proto, že prázdnou klauzuli jsme dostali již v $R^3(M)$.

2.5.23 Příklad. Je dána sentence

$$\varphi = (\exists x\, (M(x) \wedge \neg P(x)) \wedge \forall y\, (M(y) \Rightarrow S(y))) \Rightarrow \exists z\, (S(z) \wedge \neg P(z)).$$

Rezoluční metodou rozhodněte, zda se jedná o tautologii.

2.5.24 Řešení. φ je tautologie právě tehdy, když je sentence $\neg\varphi$ nesplnitelná. K sentenci $\neg\varphi$ najdeme množinu klauzulí S, která je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná sentence $\neg\varphi$.

Sentenci $\neg\varphi$ převedeme na klauzální tvar a dostaneme množinu S, kde

$$S = \{M(a), \neg P(a), \forall y\, (\neg M(y) \vee S(y)), \forall z\, (\neg S(z) \vee P(z))\}.$$

Resolventa klauzulí $K_1 = M(a)$ a $K_3 = \forall y\, (\neg M(y) \vee S(y))$ je klauzule $S(a)$. Dále resolventou klauzulí $K_2 = \neg P(a)$ a $K_4 = \forall z\, (\neg S(z) \vee P(z)$ je klauzule $\neg S(a)$. Nyní resolventa klauzulí $S(a)$ a $\neg S(a)$ je prázdná klauzule.

Protože jsme dostali prázdnou klauzuli ($\mathbf{F} \in R^2(S)$), je množina S nesplnitelná a φ je tautologie. $\square$

2.5.25 Poznámka. Pomocí rezoluční metody můžeme také zjišťovat, zda dvě sentence jsou nebo nejsou tautologicky ekvivalentní. Ukážeme si to na příkladě.

2.5.26 Příklad. Pro dvě sentence φ a ψ rezoluční metodou rozhodněte, zda $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$, kde $\varphi = \exists x\, \forall y\, Q(x, y)$ a $\psi = \forall y\, \exists x\, Q(x, y)$.

Řešení. Abychom ověřili, že $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$, musíme ověřit, zda platí

$$\varphi \models \psi \quad \text{a} \quad \psi \models \varphi.$$

Ad 1. Utvoříme množinu $\{\varphi, \neg\psi\}$. Této množině odpovídá množina sentencí (přejmenovali jsme proměnné v sentenci $\neg\psi$)

$$\{\exists x\, \forall y\, Q(x, y), \exists t\, \forall z\, \neg Q(z, t)\}.$$

Skolemizujeme a dostaneme množinu klauzulí

$$S = \{\forall y\, Q(a, y), \forall z\, \neg Q(z, b)\}.$$

Substituci vytvoříme takto: za proměnnou y dosadíme konstantu b a za proměnnou z dosadíme konstantu a. Tím dostaneme dvojici klauzulí $K_1 = Q(a, b)$ a $K_2 = \neg Q(a, b)$; jejich resolventa je prázdná klauzule. Proto $\varphi \models \psi$ je pravdivé.

Ad 2. Obdobně utvoříme množinu $\{\psi, \neg\varphi\}$. Této množině odpovídá množina sentencí

$$\{\forall y\, \exists x\, Q(x, y), \forall t\, \exists z\, \neg Q(t, z)\}.$$

Skolemizujeme a dostaneme množinu klauzulí

$$S = \{\forall y\, Q(f(y), y), \forall t\, \neg Q(t, g(t))\}.$$

Nyní sice můžeme za proměnnou t dosadit term $f(y)$, ale dostáváme dvě klauzule $K_1 = \forall y\, Q(f(y), y)$ a $K_2 = \forall y\, \neg Q(f(y), g(f(y)))$, jejichž resolventa neexistuje (za y nemůžeme dosadit term $f(g(y))$, protože term $f(g(y))$ již proměnnou y obsahuje). Proto $\psi \models \varphi$ není pravdivé a pravdivé proto není ani $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$. $\square$