Kapitola 3

Grafy

3.1 Orientované a neorientované grafy

3.1.1 Orientovaný graf. Definice. *Orientovaný graf* G je trojice (V, E, ε), kde V je neprázdná konečná množina *vrcholů* (též zvaných *uzlů*), E je konečná množina jmen *hran* (též zvaných *orientovaných hran*) a ε je zobrazení, které každé hraně $e \in E$ přiřazuje uspořádanou dvojici vrcholů a nazývá se *vztah incidence*. $\square$

Další pojmy spojené s orientovanými grafy. Jestliže $\varepsilon(e) = (u, v)$ pro $u, v \in V$, říkáme, že vrchol u je *počáteční vrchol* hrany e a vrchol v je *koncový vrchol* hrany e; značíme $PV(e) = u$ a $KV(e) = v$. O vrcholech u, v říkáme, že jsou *krajní vrcholy* hrany e, též že jsou *incidentní* s hranou e. Jestliže počáteční a koncový vrchol jsou stejné, říkáme, že hrana e je *orientovaná smyčka*. $\square$

3.1.2 Neorientovaný graf. Definice. *Neorientovaný graf* je trojice $G = (V, E, \varepsilon)$, kde V je neprázdná konečná množina *vrcholů* (též zvaných *uzlů*), E je konečná množina jmen *hran* a ε je zobrazení, které každé hraně $e \in E$ přiřazuje množinu $\{u, v\}$ (kde $u, v \in V$ jsou vrcholy) a nazývá se *vztah incidence*. $\square$

Další pojmy spojené s neorientovanými grafy. Jestliže $\varepsilon(e) = \{u, v\}$ pro $u, v \in V$, říkáme, že u, v jsou *krajní vrcholy* hrany e, též že jsou *incidentní* s hranou e. Je-li $u = v$, říkáme že e je *(neorientovaná) smyčka*. $\square$

3.1.3 Paralelní hrany. Definice. Jestliže v orientovaném nebo neorientovaném grafu existují dvě různé hrany e_1, e_2, pro které platí, že $\varepsilon(e_1) = \varepsilon(e_2)$, říkáme, že hrany e_1, e_2 jsou *paralelní*. $\square$

Uvědomte si, že pro orientované grafy to znamená, že počáteční vrcholy i koncové vrcholy hran e_1, e_2 jsou stejné, zatímco pro neorientované grafy to pouze znamená, že krajní vrcholy hran e_1, e_2 jsou stejné.

3.1.4 Prostý graf. Definice. Graf (orientovaný nebo neorientovaný) se nazývá *prostý graf*, nemá-li paralelní hrany. $\square$

3.1.5 Poznámka. V některé literatuře se termínem *graf* rozumí prostý graf a grafům, ať již orientovaným nebo neorientovaným, které mají paralelní hrany, se říká *multigrafy*. Vzhledem k tomu, že v řadě aplikací hrají paralelní hrany podstatnou roli, my tuto terminologii nebudeme používat.

3.1.6 Stupně vrcholů. Definice. Je dán orientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$. *Vstupní stupeň* vrcholu v, značíme jej $d^-(v)$, je roven počtu hran, pro které je v koncovým vrcholem (které do vrcholu v vstupují), tj.

$$d^-(v) = |\{e \in E; KV(e) = v\}|.$$

Výstupní stupeň vrcholu v, značíme jej $d^+(v)$, je roven počtu hran, pro které je v počátečním vrcholem (které z vrcholu v vystupují), tj.

$$d^+(v) = |\{e \in E; PV(e) = v\}|.$$

Stupeň vrcholu v, značíme jej $d(v)$, je roven počtu hran, které jsou incidentní s vrcholem v, tj.

$$d(v) = d^-(v) + d^+(v).$$

Je dán neorientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$. *Stupeň* vrcholu v, značíme jej $d(v)$, je roven počtu hran, které jsou incidentní s vrcholem v, kde smyčka je počítána dvakrát. □

Všimněte si, že v definici stupně vrcholu je smyčka započítána dvakrát i v případě orientovaných grafů.

3.1.7 Tvrzení. Pro každý graf G (orientovaný nebo neorientovaný) platí

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|,$$

kde $|E|$ značí počet hran grafu G. □

3.1.8 Důsledek. Každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně. □

3.1.9 Zadávání grafu. Orientovaný i neorientovaný graf můžeme zadat seznamem jeho vrcholů, a pro každý vrchol seznamem hran, které v něm začínají a/nebo v něm končí. Graf též můžeme zadat maticí sousednosti nebo maticí incidence.

3.1.10 Matice sousednosti. Je dán graf $G = (V, E, \varepsilon)$, kde jsme očíslovali vrcholy, tj. $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Čtvercová matice $\mathbf{M} = (m(i,j))$ řádu n se nazývá *matice sousednosti* grafu G, splňuje-li:

- Pro orientovaný graf je $m(i,j)$ roven počtu hran, pro něž je v_i počáteční vrchol a v_j koncový vrchol.
- Pro neorientovaný graf je $m(i,j)$ roven počtu hran s krajními vrcholy v_i a v_j.

□

Poznamenejme, že pro neorientovaný graf je matice sousednosti symetrická.

3.1.11 Matice incidence. Je dán graf $G = (V, E, \varepsilon)$ bez smyček. Očíslujme vrcholy $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a hrany $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Matice $\mathbf{B} = (b(i,j))$ typu (n, m) se nazývá *matice incidence* grafu G, splňuje-li:

- Pro orientovaný graf je

$$b(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } v_i \text{ je počáteční vrchol hrany } e_j, \\ -1, & \text{jestliže } v_i \text{ je koncový vrchol hrany } e_j, \\ 0, & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

- Pro neorientovaný graf je

$$b(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } v_i \text{ je krajní vrchol hrany } e_j, \\ 0, & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

□

Matice incidence orientovaného grafu má v každém sloupci jednu 1 a jednu -1, pro neorientované grafy má v každém sloupci dvě 1.

3.1.12 Porovnávání grafů. Definice. Řekneme, že dva grafy $G = (V, E, \varepsilon)$ a $G' = (V', E', \varepsilon')$ jsou si *rovny*, jestliže $V = V'$, $E = E'$ a $\varepsilon = \varepsilon'$.

Řekneme, že dva grafy $G = (V, E, \varepsilon)$ a $G' = (V', E', \varepsilon')$ jsou *isomorfní*, jestliže existují bijekce $f\colon V \to V'$ a $g\colon E \to E'$ takové, že pro orientované grafy

$$\varepsilon(e) = (u, v) \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varepsilon'(g(e)) = (f(u), f(v))$$

a pro neorientované grafy

$$\varepsilon(e) = \{u, v\} \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varepsilon'(g(e)) = \{f(u), f(v)\}.$$

□

3.1.13 Sled v orientovaném grafu. Definice. Je dán orientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$. *Orientovaný sled* v G je posloupnost vrcholů a hran

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$$

taková, že pro každé $i = 1, 2, \dots, k-1$ platí $v_i = PV(e_i)$ a $v_{i+1} = KV(e_i)$.

Neorientovaný sled v G je posloupnost vrcholů a hran

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$$

taková, že pro každé $i = 1, 2, \dots, k-1$ platí že vrcholy v_i a v_{i+1} jsou krajní vrcholy hrany e_i. □

Poznámka: Neorientovaný sled se od orientovaného sledu liší tím, že můžeme „jít proti směru“ hrany.

3.1.14 Sled v neorientovaném grafu. Definice. Je dán neorientovaný graf. Pak *neorientovaný sled* je posloupnost vrcholů a hran

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$$

taková, že hrana e_i je incidentní s vrcholy v_i a v_{i+1} pro všechny $i = 1, 2, \dots, k-1$. □

3.1.15 Triviální sled je sled, který obsahuje jediný vrchol a žádnou hranu. Považujeme ho jak za orientovaný, tak za neorientovaný.

3.1.16 Uzavřené sledy. Máme dán orientovaný nebo neorientovaný sled $v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k$. Říkáme, že vrchol v_1 je *počátečním vrcholem sledu* a v_k je *koncovým vrcholem sledu*. Též říkáme, že sled *vede z vrcholu* v_1 *do vrcholu* v_k.

Definice. Orientovaný (neorientovaný) sled se nazývá *uzavřený*, jestliže $k > 1$ a $v_1 = v_k$. V opačném případě mluvíme o *otevřeném* sledu. □

Tedy triviální sled nepovažujeme za uzavřený.

3.1.17 Tah a cesta. Definice. Orientovaný (neorientovaný) sled nazýváme orientovaným (neorientovaným) *tahem*, jestliže se v něm neopakují hrany.

Orientovaný (neorientovaný) tah je *cestou*, jestliže se v něm neopakují vrcholy s tou výjimkou, že může být uzavřený, tj. může být $v_1 = v_k$. Uzavřená orientovaná cesta se nazývá *cyklus*, uzavřená neorientovaná cesta se nazývá *kružnice*. □

Poznámka. Každá cesta je zároveň tahem i sledem, naopak to ale neplatí. Také každý cyklus je zároveň kružnicí, ale ne každá kružnice je cyklem.

Poznamenejme, že triviální sled je též tahem i cestou *není* však ani kružnicí ani cyklem.

3.1.18 Dostupnost. Definice. Máme dán graf $G = (V, E, \varepsilon)$. Řekneme, že vrchol v je *orientovaně (neorientovaně) dostupný* z vrcholu w, jestliže existuje orientovaná (neorientovaná) cesta z w do v. □

Poznámka. V definici dostupnosti jsme mohli požadovat existenci sledu (místo cesty) a dostali bychom stejný pojem. Když totiž existuje orientovaný (neorientovaný) sled z vrcholu w do vrcholu v, pak také existuje orientovaná (neorientovaná) cesta z vrcholu w do vrcholu v.

3.1.19 Souvislý graf. Definice. Řekneme, že (orientovaný nebo neorientovaný) graf je *souvislý*, jestliže pro každé dva vrcholy u, v grafu existuje neorientovaná cesta z u do v. □

Poznámka. Vždy existuje cesta z vrcholu u do sebe – totiž triviální cesta. Také platí, že neorientovaná cesta z vrcholu u do vrcholu v je také neorientovanou cestou z v do u (stačí cestu „číst pozpátku“).

3.2 Stromy

3.2.1 Definice. Orientovaný nebo neorientovaný graf se nazývá *strom*, je-li souvislý a neobsahuje-li kružnici. □

3.2.2 Tvrzení. V každém stromu s alespoň dvěma vrcholy existuje vrchol stupně 1. □

Kdyby totiž v nějakém grafu měl každý vrchol stupeň alespoň 2, pak by v grafu existovala kružnice.

3.2.3 Věta. Každý strom o n vrcholech má $n - 1$ hran. □

Zdůvodnění: Větu je možné dokázat indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení zřejmě platí pro stromy o 1 nebo 2 vrcholech.

Předpokládejme, že tvrzení věty platí pro všechny stromy s n vrcholy. Vezměme libovolný strom G s $n + 1$ vrcholy. Označme G' strom, který dostaneme tak, že z G odstraníme vrchol stupně 1. Graf G' je opět strom a má n vrcholů, tedy obsahuje přesně $n - 1$ hran. Proto G má $n - 1 + 1 = n$ hran.

3.2.4 Důsledek. V každém stromu s alespoň dvěma vrcholy existují (alespoň) dva vrcholy stupně 1. □

Zdůvodnění: Má-li souvislý graf n vrcholů ($n > 1$) a $n - 1$ hran, nemůže mít jen jeden vrchol stupně 1.

Také není těžké nahlédnout, že vezmeme-li v grafu, který nemá kružnice, cestu o největším počtu hran, pak oba koncové vrcholy této cesty musí mít stupeň 1.

3.2.5 Poznámka. Mějme souvislý graf G. Přidáme-li k němu hranu (aniž bychom zvětšili množinu vrcholů), zůstane graf souvislý.

Mějme graf G bez kružnic. Odebereme-li v grafu G hranu, vzniklý graf opět nebude obsahovat kružnici.

Strom je graf, který má nejmenší počet hran, aby mohl být souvislý, a současně největší počet hran, aby v něm neexistovala kružnice.

Poznamenejme, že přidáním hrany zde rozumíme přidání hrany mezi již existující vrcholy (další vrcholy nepřidáváme).