3.2.6 Tvrzení. Je dán graf G, pak následující je ekvivalentní.

1. G je strom.
2. Graf G nemá kružnice a přidáme-li ke grafu libovolnou hranu uzavřeme přesně jednu kružnici.
3. Graf G je souvislý a odebráním libovolné hrany přestane být souvislý.

□

Poznamenejme, že přidáním hrany zde rozumíme přidání hrany mezi již existující vrcholy (další vrcholy nepřidáváme).

3.2.7 Podgrafy. Definice. Je dán graf $G = (V, E, \varepsilon)$. *Podgraf* grafu G je trojice $G' = (V', E', \varepsilon')$, kde $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a ε' je restrikce ε na množině E', taková, že trojice $G' = (V', E', \varepsilon')$ je také graf.

Podgraf $G' = (V', E', \varepsilon')$ se nazývá *faktor* grafu G, jestliže $V' = V$.

Podgraf $G' = (A, E', \varepsilon')$ se nazývá *podgraf indukovaný množinou* A, $A \subseteq V$, jestliže každá hrana grafu G, která má oba krajní vrcholy v množině A, leží v E'. Podgraf indukovaný množinou A se též nazývá *úplný podgraf na množině* A. □

Jinými slovy, podgraf dostaneme tak, že z grafu G vynecháme některé (nebo žádné) vrcholy a některé (nebo žádné) hrany a to tak, že necháme-li v podgrafu hranu e, pak tam necháme i oba krajní vrcholy této hrany.

Faktor je podgraf, kde jsme ponechali všechny vrcholy. Podgraf indukovaný množinou vrcholů A je podgraf s množinou vrcholů A obsahující všechny hrany grafu G, které obsahovat může.

3.2.8 Komponenty souvislosti. Definice. Máme dán (orientovaný nebo neorientovaný) graf G. *Komponenta souvislosti* (někdy též *komponenta slabé souvislosti*) je maximální množina vrcholů A taková, že indukovaný podgraf určený A je souvislý. □

Maximální množinou zde rozumíme takovou množinu A, pro kterou platí, že přidáme-li k množině A libovolný vrchol, podgraf indukovaný touto větší množinou už souvislý nebude.

3.2.9 Poznámka. Graf je souvislý má-li jedinou komponentu souvislosti.

3.3 Minimální kostra

3.3.1 Kostra grafu. Definice. Je dán graf G. Faktor grafu G, který je stromem, se nazývá *kostra* grafu G. □

3.3.2 Tvrzení. Graf G má kostru právě tehdy, když je souvislý. □

3.3.3 Minimální kostra. Je dán souvislý graf G spolu s ohodnocením hran c, tj. pro každou hranu $e \in E(G)$ je dáno číslo $c(e)$ (číslo $c(e)$ nazýváme *cenou hrany* e).

Definice. *Minimální kostra* grafu $G = (V, E)$ je taková kostra grafu $K = (V, L)$, že $\sum_{e \in L} c(e)$ je nejmenší (mezi všemi kostrami grafu G). □

3.3.4 Tvrzení. V každém souvislém ohodnoceném grafu existuje minimální kostra. Nemusí však být jediná. □

3.3.5 Kruskalův algoritmus. Jedná se o modifikaci postupu 3.3.8:

1. Setřídíme hrany podle ceny do neklesající posloupnosti, tj.

$$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_m)$$

   Položíme $L = \emptyset$, $\mathcal{S} = \{\{v\}; v \in V\}$.

2. Probíráme hrany v daném pořadí. Hranu e_i přidáme do L, jestliže má oba krajní vrcholy v různých množinách $S, S' \in \mathcal{S}$. V $\mathcal{S}$ množiny S a S' nahradíme jejich sjednocením. V opačném případě hranu přeskočíme.

3. Algoritmus končí, jestliže jsme přidali $n-1$ hran (tj. $\mathcal{S}$ se skládá z jediné množiny).

□

Uvědomte si, že v tomto případě vybíráme a přidáváme vždy hranu, která je nejlevnější pro **obě** množiny S a S'.

3.3.6 Primův algoritmus. Jedná se o modifikaci postupu 3.3.8:

1. Vybereme libovolný vrchol v. Položíme $L = \emptyset$, $S = \{v\}$.

2. Vybereme nejlevnější hranu e, která spojuje některý vrchol x z množiny S s vrcholem y, který v S neleží. Vrchol y přidáme do množiny S a hranu e přidáme do L.

3. Opakujeme krok 2 dokud nejsou všechny vrcholy v množině S.

□

Uvědomte si, že přestože v Primově algoritmu „neudržujeme“ systém komponent grafu (V, L), komponenty známe. Jsou to: komponenta S obsahující na začátku vybraný vrchol v, ostatní komponenty jsou jednoprvkové. Hrana, kterou přidáváme, je vždy nejlevnější hrana, která vede ven z komponenty S.

3.3.7 Příklad. Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$ s množinou vrcholů $V = \{1, \ldots, 7\}$ kde následující matice udává ceny hran (to znamená, že na místě (i, j) máme buď $c(\{i, j\})$, když $\{i, j\} \in E$, nebo "$-$", jestliže $\{i, j\} \notin E$). Najdeme minimální kostru grafu (G, c) nejprve Kruskalovým algoritmem

$$\begin{pmatrix}
- & 6 & 9 & - & - & - & 9 \\
6 & - & 2 & 1 & 3 & - & - \\
9 & 2 & - & 1 & - & - & 15 \\
- & 1 & 1 & - & 10 & 13 & 3 \\
- & 3 & - & 10 & - & 10 & 1 \\
- & - & - & 13 & 10 & - & 15 \\
9 & - & 15 & 3 & 1 & 15 & -
\end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve uspořádáme hrany podle ceny neklesajícím způsobem (v závorce je vždy cena odpovídající hrany)

$$e_1 = \{2, 4\}(1), e_2 = \{3, 4\}(1), e_3 = \{5, 7\}(1), e_4 = \{2, 3\}(2), e_5 = \{2, 5\}(3), e_6 = \{4, 7\}(3),$$

$$e_7 = \{1, 2\}(6), e_8 = \{1, 3\}(9), e_9 = \{1, 7\}(9), e_{10} = \{4, 5\}(10), e_{11} = \{5, 6\}(10), e_{12} = \{4, 6\}(13),$$

$$e_{13} = \{3, 7\}(15), e_{14} = \{6, 7\}(15).$$

Položíme $T = \emptyset$, $\mathcal{S} = \{\{i\} \mid i \in V\}$.

Nyní procházíme hrany v tomto pořadí a hranu e_i přidáme do L právě tehdy, když neuzavře kružnici. Přitom upravíme komponenty souvislosti grafu (V, T).

1. e_1 neuzavře kružnici, proto $T := \{\{2,4\}\}$, komponenty souvislost v $\mathcal{S}$ jsou $\{1\}$, $\{2,4\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ a $\{7\}$.
2. e_2 neuzavře kružnici, proto $T := \{\{2,4\},\{3,4\}\}$, komponenty souvislost v $\mathcal{S}$ jsou $\{1\}$, $\{2,3,4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ a $\{7\}$.
3. e_3 neuzavře kružnici, proto $T := \{\{2,4\},\{3,4\},\{5,7\}\}$, komponenty souvislost v $\mathcal{S}$ jsou $\{1\}$, $\{2,3,4\}$, $\{5,7\}$ a $\{6\}$.
4. e_4 uzavře kružnici tvořenou e_1, e_2 a e_4, proto T i $\mathcal{S}$ jsou stejné jako v 3.
5. e_5 neuzavře kružnici, proto $T := \{\{2,4\},\{3,4\},\{5,7\},\{2,5\}\}$, komponenty souvislost v $\mathcal{S}$ jsou $\{1\}$, $\{2,3,4,5,7\}$ a $\{6\}$.
6. e_6 uzavře kružnici tvořenou e_1, e_5, e_3 a e_6, proto T i $\mathcal{S}$ jsou stejné jako v 5.
7. e_7 neuzavře kružnici, proto $T := \{\{2,4\},\{3,4\},\{5,7\},\{2,5\},\{1,2\}\}$, komponenty souvislost v $\mathcal{S}$ jsou $\{1,2,3,4,5,7\}$ a $\{6\}$.
8. e_8 uzavře kružnici tvořenou e_1, e_2, e_7 a e_8, proto T i $\mathcal{S}$ jsou stejné jako v 7.
9. e_9 uzavře kružnici tvořenou e_3, e_5, e_7 a e_9, proto T i $\mathcal{S}$ jsou stejné jako v 7.
10. e_{10} uzavře kružnici tvořenou e_1, e_5 a e_{10}, proto T i $\mathcal{S}$ jsou stejné jako v 7..
11. e_{11} neuzavře kružnici, proto $T := \{\{2,4\},\{3,4\},\{5,7\},\{2,5\},\{1,2\},\{5,6\}\}$, v $\mathcal{S}$ je jediná komponenta souvislosti a to $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Protože T obsahuje 6 hran (a $\mathcal{S}$ je jednoprvková, algoritmus končí a

$$T = \{\{2,4\},\{3,4\},\{5,7\},\{2,5\},\{1,2\},\{5,6\}\}$$

je množina hran minimální kostry grafu G. Cena konstry L je

$$c(T) = 1 + 1 + 1 + 3 + 6 + 10 = 22.$$

3.3.8 Obecný postup pro hledání minimální kostry. Je dán prostý souvislý graf $G = (V, E)$ a ohodnocení hran c.

1. Na začátku položíme $L = \emptyset$. $\mathcal{S}$ je množina všech komponent souvislosti grafu $K = (V, L)$; tj. na začátku je $\mathcal{S} = \{\{v\}; v \in V\}$.
2. Dokud není graf $K = (V, L)$ souvislý (tj. dokud $\mathcal{S}$ se neskládá z jediné množiny), vybereme hranu e podle těchto pravidel:

   (a) e spojuje dvě různé komponenty souvislosti S, S' grafu K (tj. dvě množiny z $\mathcal{S}$)

   (b) a pro S nebo S' je nejlevnější hranou, která vede z komponenty ven.

   Hranu e přidáme do množiny L a množiny S a S' nahradíme jejich sjednocením.
3. Výsledkem je množina hran L.

3.3.9 Tvrzení. Obecný postup 3.3.8 skončí po konečně mnoha krocích a výsledkem je některá minimální kostra. □