2.8 Kořenové stromy

2.8.1 Kořen. Definice. Je dán orientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$. Řekneme, že vrchol $r \in V$ je *kořen* grafu G, jestliže pro každý vrchol $v \in V$ existuje orientovaná cesta z r do v. □

Jinými slovy, vrchol r je kořen grafu G právě tehdy, když každý vrchol grafu G je orientovaně dostupný z vrcholu r.

2.8.2 Poznámka. Uvědomte si, že pro vrchol r existuje orientovaná cesta z r do r, totiž triviální cesta.

Každý orientovaný graf, který má kořen, je souvislý. Naopak to neplatí; existují orientované souvislé grafy, které nemají kořen.

Orientovaný graf může mít i několik kořenů; např. v cyklu je každý vrchol kořenem.

2.8.3 Kořenový strom. Definice. Orientovaný graf, který má kořen a je stromem, se nazývá *kořenový strom*. □

Protože každý graf který má kořen je souvislý, mohli jsme kořenový strom definovat jako graf, který má kořen a nemá kružnice.

2.8.4 Tvrzení. Je-li G kořenový strom, pak má pouze jeden kořen. □

Zdůvodnění. Kdyby nějaký strom měl dva kořeny, řekněme r_1 a r_2, pak by existovala orientovaná cesta z r_1 do r_2, a také orientovaná cesta z r_2 do r_1. Spojením těchto dvou cest bychom dostali uzavřený orientovaný sled, a ten vždy obsahuje cyklus, tedy i kružnici a to strom obsahovat nemůže.

2.8.5 Následník, předchůdce a list. Definice. Je dán kořenový strom $G = (V, E)$. Jestliže (u, v) je hrana grafu G, pak říkáme, že vrchol u je *předchůdce* vrcholu v a vrchol v je *následník* vrcholu u. Vrchol, který nemá následníka, se nazývá *list*. □

2.8.6 Hladiny a výška kořenového stromu. Definice. Je dán kořenový strom $G = (V, E)$ s kořenem r. Řekneme, že vrchol *v leží v hladině k*, jestliže orientovaná cesta z r do v má přesně k hran.

Výška kořenového stromu je největší k takové, že k-tá hladina je neprázdná. □

Víme, že pro každý vrchol v v kořenovém stromě existuje právě jedna orientovaná cesta z kořene r do vrcholu v. Proto jsou hladiny kořenového stromu korektně definované.

Výšku kořenového stromu jsme také mohli definovat jako počet hran v nejdelší orientované cestě (ta musí vést z kořene do některého z listů).

2.8.7 Podstrom určený vrcholem. Definice. Je dán kořenový strom G. *Podstrom určený vrcholem v* je podgraf G indukovaný množinou všech vrcholů, které jsou orientovaně dostupné z vrcholu v. □

Poznámka. Uvědomte si, že podstrom určený vrcholem v je sám kořenovým stromem a jeho kořen je v.

2.8.8 Binární kořenové stromy. Definice. Kořenový strom se nazývá *binární kořenový strom*, jestliže každý vrchol má nejvýše dva následníky. □

V binárním kořenovém stromě mluvíme o *pravém* a *levém následníku* vrcholu. *Levý podstrom*, resp. *pravý podstrom* vrcholu v je podstrom určený levým, resp. pravým následníkem vrcholu v.

2.8.9 Halda. Jednou z četných aplikací kořenových stromů je datová struktura zvaná *halda*. Je např. základem algoritmu Heapsort pro řazení.

Halda je stromová datová struktura s touto vlastností: Je-li vrchol v orientovaně dostupný z vrcholu x, pak číselná hodnota ve vrcholu v je větší nebo rovna číselné hodnotě ve vrcholu x. Navíc se jedná o úplný binární strom; tj. každý vrchol s výjimkou listů a vrcholů v předposlední hladině má vždy dva následníky, a jestliže v předposlední hladině má vrchol pouze jeden následník, pak je to levý následník a všechny vrcholy „vpravo" od něho jsou již listy.

Z definice haldy je zřejmé, že nejmenší hodnotu má kořen haldy, proto je nalezení minima velmi jednoduché. Musí se však vyřešit dvě úlohy — a to odstranění kořene a vložení prvku do haldy. Obě tyto operace je možné provést v čase úměrném $\log_2 n$, kde n je počet prvků, které má halda.

Velkou výhodou haldy je to, že ji v počítači nemusíme držet jako stromovou strukturu, ale můžeme se v haldě „pohybovat" pomocí násobení dvěma a celočíselného dělení dvěma.

2.9 Acyklické grafy

2.9.1 Definice. Orientovaný graf se nazývá *acyklický*, jestliže neobsahuje žádný cyklus.
□

2.9.2 Topologické očíslování vrcholů. Definice. Je dán orientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$ s n vrcholy. Očíslování vrcholů

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

se nazývá *topologické očíslování*, jestliže pro každou hranu e s počátečním vrcholem v_i a koncovým vrcholem v_j platí $i < j$. □

Jinými slovy, hrany musí vést vždy z vrcholu s menším indexem do vrcholu s větším indexem.

2.9.3 Topologické očíslování hran. Definice. Je dán orientovaný graf $G = (V, E, \varepsilon)$ s m hranami. Očíslování hran

$$e_1, e_2, \ldots, e_m$$

se nazývá *topologické očíslování*, jestliže pro každé dvě hrany e_i, e_j pro které koncový vrchol hrany e_i je počátečním vrcholem hrany e_j platí $i < j$. □

Jinými slovy, kdykoli hrana e' navazuje na hranu e, musí být v posloupnosti hrana e vypsána dříve než hrana e'.

2.9.4 Poznámka. Definici topologického očíslování hran jsme mohli formulovat i následujícím způsobem:

Pro každý vrchol v platí: vypisujeme-li do posloupnosti libovolnou hranu s počátečním vrcholem v, musely již být vypsány všechny hrany, které ve vrcholu v končí.

2.9.5 Tvrzení. V každém acyklickém grafu existuje vrchol, který má vstupní stupeň roven 0. □

Myšlenka důkazu. Kdyby každý vrchol nějakého grafu měl vstupní stupeň alespoň 2, pak bychom (podobnou úvahou jako v důkazu faktu, že každý strom o $n > 1$ vrcholech má aspoň jeden vrchol stupně 1) dostali existenci cyklu.

2.9.6 Věta. Pro orientovaný graf G jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. G je acyklický;

2. G má topologické očíslování vrcholů;

3. G má topologické očíslování hran.

□

Nástin zdůvodnění. Není těžké ukázat, že má-li graf topologické očíslování vrcholů, má i topologické očíslování hran – stačí hrany vypisovat takto: Nejprve vypíšeme hrany začínající v prvním vrcholu (topologického očíslování), pak v druhém vrcholu, atd. (Uvědomte si, že z posledního vrcholu topologického očíslování vrcholů už žádná hrana nevede.)

Obdobně se ukáže i opačná implikace; totiž, že graf, který má topologické očíslování hran, má i topologické očíslování vrcholů. Vypisujeme počáteční vrcholy hran v topologickém očíslování hran a to vždy první výskyt vrcholu. Na konci nám zůstanou některé vrcholy (aspoň jeden) a ty pak vypíšeme na konec v libovolném pořadí.

Také je zřejmé, že cyklus není možné topologicky uspořádat. Tudíž, má-li graf cyklus, nemá topologické očíslování (ani vrcholů, ani hran). Fakt, že acyklický graf má topologické očíslování vrcholů ukážeme následujícím algoritmem.

2.9.7 Postup na nalezení topologického očíslování vrcholů. Je dán prostý orientovaný graf $G = (V, E)$. Úkolem je je najít některé topologické očíslování vrcholů G.

1) Pro každý vrchol v spočítáme vstupní stupeň $d^-(v)$.

2) Do množiny M dáme všechny vrcholy se vstupním stupněm 0,
 položíme $i := 1$.

3) Dokud $M \neq \emptyset$ provedeme

 3a) Vybereme vrchol v z množiny M a odstraníme ho z M.
 Položíme $v_i := v$, $i := i + 1$.

 3b) Pro každou hranu e s $PV(e) = v$ provedeme

$$d^-(KV(e)) := d^-(KV(e)) - 1$$

 a v případě, že $d^-(KV(e)) = 0$, přidáme vrchol $KV(e)$ do množiny M.

2.9.8 Věta. Postup 2.9.7 skončí po konečně mnoha krocích a po skončení je posloupnost $v_1, \ldots, v_n$ topologické očíslování vrcholů grafu G. □

2.9.9 Poznámka. Kdybychom chtěli získat topologické očíslování hran, stačilo by vypisovat hrany do posloupnosti v pořadí, jak je zpracováváme v kroku 3b).

2.9.10 Jádro grafu. Definice. Podmnožina K vrcholů orientovaného grafu G se nazývá *jádro grafu*, jestliže splňuje následující podmínky:

1. Pro každou hranu e s počátečním vrcholem $PV(e) \in K$ platí $KV(e) \notin K$.

2. Pro každý vrchol v, který neleží v K, existuje hrana e s $PV(e) = v$ a $KV(e) \in K$.

□

Podmínka 1 vlastně říká, že neexistuje hrana, která by vedla z množiny K do sebe. Podmínka 2 se dá formulovat: z každého vrcholu, který leží mimo K, se můžeme dostat po hraně zpět do K.

2.9.11 Tvrzení. V každém acyklickém grafu existuje jádro a je určeno jednoznačně. □

Důkaz. Jádro je možné sestrojit z topologického očíslování vrcholů a to následujícím způsobem: Předpokládejme, že

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

je topologické očíslování vrcholů grafu G. Do jádra K vložíme poslední vrchol $v := v_n$ a z posloupnosti vyškrtáme všechny vrcholy, ze kterých vede hrana do zařazeného vrcholu v. Jestliže ještě nebyly vyškrtány všechny vrcholy, vezmeme nevyškrtnutý vrchol s největším indexem v_i zařadíme ho do jádra K a opět vyškrtneme ze zbylé posloupnosti všechny vrcholy, z nichž vede hrana do v_i. Postup opakujeme, dokud není posloupnost prázdná.

Není těžké nahlédnout, že postup je správný; stačí si uvědomit, že vrchol z něhož nevychází žádná hrana, musí ležet v jádře.

Předpokládejme, že v některém acyklickém grafu by existovala dvě různá jádra K_1 a K_2. Protože jsou různá, je množina $(K_1 \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus K_1)$ neprázdná.

Uvažujme topologické očíslování vrcholů acyklického grafu G

$$v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

Z množiny $(K_1 \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus K_1)$ vybereme vrchol s největším pořadovým číslem v_r. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $v_r \in K_1$ a $v_r \notin K_2$. Protože $v_r \notin K_2$, existuje hrana e s $PV(e) = v_r$ a $KV(e) = v_s$. Musí platit $s > r$ a $v_s \notin K_1$ (v opačném případě by K_1 nebylo jádro grafu). A to je spor s volbou vrcholu v_r.