2.11 Eulerovy grafy

2.11.1 Připomeňme, že tah je sled, ve kterém se neopakují hrany. Jinými slovy, tah obsahuje hrany grafu vždy nejvýše jedenkrát.

2.11.2 Eulerovské tahy. Definice. Tah v grafu se nazývá *eulerovský*, jestliže prochází každou hranou. □

Jinými slovy, tah se nazývá eulerovský, jestliže obsahuje každou hranu přesně jedenkrát. Eulerovské tahy se dělí na uzavřené a otevřené, orientované a neorientované.

2.11.3 Eulerův graf. Definice. Orientovaný (neorientovaný) graf G se nazývá *eulerovský graf*, jestliže v něm existuje uzavřený orientovaný (neorientovaný) eulerovský tah. □

2.11.4 Aplikace. Eulerovské tahy mají řadu aplikací.

- **Kreslení s co nejmenším počtem tahů.** Je dán neorientovaný souvislý graf. Úkolem je najít co nejmenší počet hranově disjunktních tahů tak, aby všechny hrany grafu byly obsaženy v některém z nich (to znamená, že každá hrana bude obsažena v přesně jednom tahu).

  Je zřejmé, že existuje-li v grafu eulerovský tah, pak je tento tah hledaným řešením. Řešení tohoto problému se dá využít např. při kreslení pomocí počítače (chceme co nejméně „přejezdů“).

- **Úloha čínského pošťáka.** Pošťák musí při své obchůzce projít všechny ulice. Jak to má udělat, aby ušel co nejméně kilometrů?

  Vytvoříme neorientovaný graf takto: vrcholy jsou křižovatky a hrany ulice mezi nimi, kterými musí pošťák projít. Hrany jsou ohodnoceny počtem kilometrů, které daná ulice má.

  Jestliže v grafu existuje eulerovský tah, pak je to nejkratší možné řešení — pošťák projde každou ulicí přesně jednou. Jestliže eulerovský tah neexistuje, musí pošťák projít některou ulicí dvakrát. Tedy hledáme „zdvojení“ některých hran tak, aby vzniklý graf byl eulerovský a aby součet přidaných hran byl nejmenší možný.

- **De Bruijnova posloupnost**. Je dáno přirozené číslo $k > 1$. Úkolem je najít co nejdelší cyklickou posloupnost 0 a 1 tak, aby žádné dvě po sobě následující k-tice této posloupnosti nebyly stejné. Úloha se dá řešit nalezením uzavřeného orientovaného eulerovského tahu ve speciálním orientovaném grafu.

2.11.5 Tvrzení. V souvislém orientovaném grafu existuje uzavřený orientovaný eulerovský tah právě tehdy, když pro každý vrchol v grafu platí

$$d^-(v) = d^+(v).$$

(Tj. v každém vrcholu končí stejný počet hran jako v něm začíná.)

V souvislém grafu existuje uzavřený neorientovaný eulerovský tah právě tehdy, když každý vrchol má sudý stupeň. □

2.11.6 Postup hledání uzavřeného orientovaného eulerovského tahu. Vybereme libovolný vrchol v grafu. Protože graf je souvislý, v každém vrcholu začíná i končí alespoň jedna hrana.

Z vrcholu v vytváříme náhodně orientovaný tah; tj. procházíme hrany tak, abychom žádnou hranou neprošli dvakrát. Takto pokračujeme, dokud je to možné, tj. dokud se nevrátíme do výchozího vrcholu v a ve vrcholu v již nezačíná žádná dosud nepoužitá hrana.

Tím jsme dostali uzavřený tah C. Jestliže C obsahuje všechny hrany, je to hledaný uzavřený eulerovský tah.

Neobsahuje-li C všechny hrany, pak na C existuje vrchol w takový, že v něm začíná ještě nepoužitá hrana. (To vyplývá ze souvislosti grafu.) Tah C ve vrcholu w rozpojíme a vložíme do něj náhodně zkonstruovaný uzavřený tah z dosud nepoužitých hran, který začíná (a končí) ve vrcholu w. Dostaneme nový tah C'.

Jestliže C' obsahuje všechny hrany, je to hledaný eulerovský tah. V opačném případě opět najdeme na C' vrchol, ve kterém začíná dosud nepoužitá hrana a postup opakujeme dokud nedostaneme tah obsahující všechny hrany.

2.11.7 Algoritmus pro hledání uzavřeného eulerovského tahu.

Vstup: Souvislý orientovaný graf $G = (V, E)$, kde pro každý vrchol platí $d^+(v) = d^-(v)$.
Výstup: Orientovaný uzavřený eulerovský tah F v grafu G.

Pomocné proměnné: Seznam F, který je na začátku prázdný a na konci obsahuje hledaný tah; množina ještě nepoužitých hran H.

1. *[Inicializace]*
   $F := \emptyset$; $H := E$

2. *[Počátek tahu]*
   zvolíme libovolný vrchol v; vložíme v do F

3. *[Test ukončení]*
   `if` $H = \emptyset$ `then stop`
   `else` $v :=$ poslední vrchol tahu F

4. *[Prodloužení tahu]*
   `if` existuje $(v, w) \in H$, `then do`
   `begin`
   přidáme hranu (v, w) a vrchol w do tahu F
   $H := H \setminus \{(v, w)\}$;
   `end`
   `go to 3`

5. *[Tah se nedá prodloužit]*
   `else` neexistuje hrana $(v, w) \in H$, `then do`
   `begin`
   najdeme vrchol y v F takový, že existuje $(y, z) \in H$;
   rozpojíme F ve vrcholu y, tj. y je poslední vrchol F
   `end`
   `go to 3`

2.11.8 De Bruijnova posloupnost podruhé. Je dáno přirozené číslo $k > 1$. Úkolem je najít co nejdelší cyklickou posloupnost 0 a 1 tak, aby žádné dvě po sobě následující k-tice této posloupnosti nebyly stejné.

Utvoříme orientovaný graf $G = (V, E)$, kde vrcholy jsou všechny různé $k - 1$-tice 0 a 1; z vrcholu $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ vedou přesně dvě orientované hrany a to do vrcholu $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, 0$ a do vrcholu $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, 1$. První hrana je ohodnocena 0, druhá hrana 1.

Je zřejmé, že graf G je souvislý a má 2^k hran. Pro každý vrchol v platí $d^+(v) = 2 = d^-(v)$. Proto v něm existuje eulerovský uzavřený tah. Vytvoříme-li posloupnost z ohodnocení jednotlivých hran v eulerovském tahu, dostaneme hledanou cyklickou posloupnost.

2.11.9 Tvrzení. V souvislém orientovaném grafu existuje otevřený orientovaný eulerovský tah právě tehdy, když existují vrcholy u_1, u_2 takové, že

$$d^-(u_1) = d^+(u_1) + 1, \ \ d^-(u_2) = d^+(u_2) - 1,$$

a pro každý jiný vrchol v grafu platí $d^-(v) = d^+(v)$.

V souvislém grafu existuje otevřený neorientovaný eulerovský tah právě tehdy, když v grafu existují přesně dva vrcholy lichého stupně. □

Důkaz je podobný jako důkaz věty **??**. Pouze při konstrukci otevřeného eulerovského tahu musíme začínat ve vrcholu u_2, tj. z vrcholu, ze kterého vychází o jednu hranu víc než do něho vchází.

2.11.10 Tvrzení. Je dán souvislý neorientovaný graf G s $2k$, $k > 0$, vrcholy lichého stupně. Pak existuje k hranově disjunktních otevřených tahů takových, že každá hrana grafu G leží v právě jednom z těchto tahů. □

2.12 Hamiltonovské grafy

Připomeňme, že cesta je tah, ve kterém se neopakují vrcholy (s výjimkou uzavřené cesty, kdy se první vrchol rovná poslednímu).

2.12.1 Hamiltonovské cesty, kružnice, cykly. Definice. Je dán graf G. Otevřená cesta se nazývá *hamiltonovská cesta*, obsahuje-li všechny vrcholy (a tudíž všechny vrcholy přesně jedenkrát). Obdobně *hamiltonovská kružnice* je kružnice, která obsahuje každý vrchol grafu; *hamiltonovský cyklus* je cyklus, který obsahuje každý vrchol grafu. □

2.12.2 Hamiltonovské grafy. Definice. Orientovaný (neorientovaný) graf G se nazývá *hamiltonovský*, jestliže obsahuje hamiltonovský cyklus (hamiltonovskou kružnici). □

2.12.3 Úlohy spojené s hamiltonovskými cestami dělíme na existenční, vyhodnocovací a optimalizační. V existenční úloze jde o to zjistit, zda v daném grafu existuje hamiltonovská cesta, kružnice nebo cyklus. Ve vyhodnocovací úloze jde o to najít (aspoň) jednu hamiltonovskou cestu, kružnici nebo cyklus v případě, že existují. V optimalizačních úlohách máme hrany grafu navíc ohodnoceny délkami a požaduje se nalezení hamiltonovské cesty, kružnice nebo cyklu s co nejmenším součtem délek jednotlivých hran cesty, kružnice nebo cyklu.

Na rozdíl od hledání eulerovských tahů, je hledání hamiltonovských cest, hamiltonovských kružnic a hamiltonovských cyklů velmi obtížná úloha. Přesněji, není znám algoritmus, který by pro obecný graf zjistil, zda v daném grafu existuje hamiltonovská cesta, kružnice nebo cyklus, a přitom provedl počet kroků, který závisí na počtu vrcholů a hran daného grafu jen polynomiálně. Přesto, nebo právě proto, jsou úlohy tohoto typu v praxi rozšířené.

2.12.4 Existují jednoduché nutné podmínky proto, aby v daném grafu existovala hamiltonovská cesta, hamiltonovská kružnice či hamiltonovský cyklus. Uvedeme několik takových tvrzení.

- Existuje-li v grafu G hamiltonovská cesta, musí být graf G souvislý.
- Existuje-li v grafu G hamiltonovská kružnice, musí mít každý vrchol G stupeň alespoň 2.
- Existuje-li v grafu G hamiltonovský cyklus, musí být graf G silně souvislý.

Netriviální nutná a postačující podmínka pro zjištění, zda daný (obecný) graf obsahuje hamiltonovskou cestu, kružnici nebo cyklus, není známa.

2.12.5 Věta. Je dán neorientovaný prostý graf $G = (V, E)$ s $n \geq 3$ vrcholy. Označme

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \ldots \leq d_n$$

posloupnost stupňů grafu G (tj. v posloupnosti jsou stupně všech vrcholů grafu G a jsou uspořádány neklesajícím způsobem). Jestliže platí následující podmínka:

$$\text{kdykoli existuje } k < \tfrac{n}{2} \text{ takové, že } d_k \leq k, \text{ pak platí } d_{n-k} \geq n - k,$$

pak graf G je hamiltonovský. □

2.12.6 Předchozí věta se nazývá Chvátalova věta. Jedná se o nejlepší možnou postačující podmínku pro existenci hamiltonovské kružnice založenou pouze na vlastnostech stupňů vrcholů. Platí totiž: Jestliže posloupnost

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \ldots \leq d_n$$

nesplňuje podmínku věty, pak existuje prostý neorientovaný graf G, který není hamiltonovský a jeho posloupnost stupňů majorizuje posloupnost $d_1, \ldots, d_n$. (To znamená, že je pro každé i alespoň tak velká jako d_i.)

Důkaz Chvátalovy věty není jednoduchý a je nad rámec této přednášky.