2.12.7 Aplikace hamiltonovských cest. Uvedeme tři aplikace hamiltonovských cest.

- **Problém obchodního cestujícího.** Jde o probém nalezení nejkratší hamiltonovské kružnice v úplném neorientovaném ohodnoceném grafu.

- **Dopravní úlohy.** Jedná se o optimalizaci pohybu nějakého dopravního prostředku; např. při rozvozu zboží, vybírání schránek apod. Často se jedná o nalezení otevřené hamiltonovské cesty. Např. při rozvozu pracovníků na roztroušená pracoviště můžeme požadovat, aby se po skončení směny dopravní prostředek nevracel prázdný, ale aby svezl pracovníky (v opačném pořadí). Hledáme proto nejkratší hamiltonovskou cestu z daného vrcholu, koncový vrchol cesty obvykle není určen.

- **Plánování procesů.** Máme nějaké výrobní zař9zení na kterém se provádějí procesy $p_1, p_2, \dots, p_n$. Přitom pro některé dvojice procesů p_i, p_j platí, že má-li po skončení procesu p_i následovat proces p_j, je třeba zařízení vyčistit, přestavět atd., tedy musíme zaplatit jistou cenu, aby po skončení procesu p_i mohl následovat proces p_j. Úkolem je najít takové pořadí procesů $p_1, p_2, \dots, p_n$ aby cena byla nulová. V případě, že takové pořadí neexistuje, můžeme žádat pořadí procesů tak, aby cena byla nejmenší. Tento druhý případ vede na problém obchodního cestujícího.

2.12.8 Protože doposud není znám žádný rychlý algoritmus, který by našel hamiltonovské cesty, kružnice či cykly, často se jejich hledání provádí metodou větví a mezí. Jak metoda větví a mezí pracuje, si ukážeme na úloze hledání nejlevnější hamiltonovské cesty v ohodnoceném grafu.

2.12.9 Hledání nejkratší hamiltonovské cesty. Vyjdeme z následujících pozorování: Každá hamiltonovská cesta v grafu G je

1. kostrou grafu G,
2. ve které má každý vrchol stupeň nejvýše 2.

Tohoto pozorování využijeme takto:

V daném grafu G najdeme minimální kostru K grafu G. Je-li tato kostra cesta, dostali jsme nejkratší hamiltonovskou cestu v grafu G.

Není-li tato kostra cesta, tj. obsahuje-li vrchol v stupně aspoň 3, zakážeme vždy jednu hranu incidentní s v. Tím rozvětvíme danou úlohu na k podúloh, kde k je stupeň vrcholu v. Přitom každá z podúĺoh má méně hran než původní úloha. Nyní každou z podúloh řešíme podobně.

Navíc, cena kterékoli již získané hamiltonovské cesty je horní odhad délky nejkratší hamiltonovské cesty. Jestliže se v některé podúloze stane, že délka minimální kostry je delší nebo stejná jako délka dosud známé hamiltonovské cesty, nemusíme se danou podúlohou již zabývat – nemůžeme dostat cestu s menší délkou.

Obdobně, jestliže v některé podúloze již minimální kostra neexistuje (zakázali jsme tolik hran, ze graf přestal být souvislý), nemusíme se touto podúlohou zabývat.

2.12.10 Poznámka. Pro zjištění horního odhadu nejkratší hamiltonovské cesty nemusíme čekat na to, až jako minimální kostru dostaneme některou hamiltonovskou cestu. Často nejprve vytvoříme některou hamiltonovskou cestu (třeba „hladovým postupem“) a ta nám pak slouží jako „prvotní“ odhad.

Poznamenejme, že popsaná metoda může pracovat dlouho. Proto v praxi přidáváme časové omezení; překročí-li doba práce toto omezení, bereme jako „nejlepší“ řešení to nejlepší z dosud známých řešení.

Popsaná metoda je zvláštním případem tzv. *metody větví a mezí*, kterou popíšeme přesněji v následujícím odstavci.

2.12.11 Metoda větví a mezí. Potřebujeme vyřešit optimalizační úlohu $\mathcal{U}$, která je dána podmínkami P a účelovou funkcí c. Přípustné řešení je každé řešení, které splňuje podmínky P, optimální je pak to přípustné řešení, které má nejlepší hodnotu účelové funkce c. Množinu přípustných řešení úlohy $\mathcal{U}$ budeme značit $PR(\mathcal{U})$.

Podmínky P rozdělíme na „jednoduché“ podmínky A a „složité“ podmínky B. Jako $\mathcal{U}'$ označíme optimalizační úlohu, která je dána pouze podmínkami A a se stejnou účelovou funkcí c.

Nejprve řešíme úlohu $\mathcal{U}'$ (tj. zapomeneme na podmínky B — říkáme, že podmínky B relaxujeme) a najdeme optimální řešení *opt* úlohy $\mathcal{U}'$. Hodnota účelové funkce pro řešení *opt* nám slouží jako odhad, jaké „nejlepší“ řešení úloha $\mathcal{U}$ (tedy úloha daná podmínkami P) může mít. Splňuje-li nalezené řešení *opt* i podmínky B (tj. je-li *opt* přípustné řešení úlohy $\mathcal{U}$), dostali jsme optimální řešení úlohy $\mathcal{U}$.

Jestliže řešení *opt* nesplňuje podmínky B, rozdělíme úlohu $\mathcal{U}$ (*větvíme úlohu*) na podúlohy $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k$ a to tak, že

1. $k \geq 2$ a
2. každé přípustné řešení úlohy $\mathcal{U}$ je přípustným řešením některé z podúloh $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k$. Tj.
$$PR(\mathcal{U}) = PR(\mathcal{U}_1) \cup \ldots \cup PR(\mathcal{U}_k).$$

Podmínka 2 nám zaručuje, že optimální řešení úlohy $\mathcal{U}$ bude některé z optimálních řešení úloh $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k$.

Jestliže úloha $\mathcal{U}_i$ již nemá přípustné řešení, nebo odhad pro optimální řešení je horší nebo stejný jako již známé přípustné řešení, úlohou se dále nezabýváme (*úlohu umrtvíme*). V opačném případě řešíme $\mathcal{U}_i$ stejným způsobem.

Je-li možné vybrat z několika podúloh, vybíráme vždy podúlohu s nejlepším odhadem. Výpočet ukončíme tehdy, když pro všechny podúlohy jsme buď našli optimální řešení, nebo jsme je umrtvili.

2.12.12 Poznámka. Pro případ hledání nejlevnější hamiltonovské cesty C máme:

- A – hamiltonovská cesta je kostra,
- B – každý vrchol v hamiltonovské cestě má stupeň nejvýše 2,
- pro každou množinu hran C je hodnota účelové funkce rovna součtu cen jednotlivých hran v C,
- cena minimální kostry slouží jako odhad optimálního řešení dané podúlohy.

2.12.13 Poznámka. Pro zmenšení počtu větvení při výpočtu nejkratší hamiltonovské cesty můžeme použít ještě jiný způsob větvení úlohy než je uveden výše.

Označme v vrchol, který má v minimální kostře stupeň $d(v) = k \geq 3$ a označme e_1, $e_, \ldots, e_k$ hrany, s krajním vrcholem v. Úlohu $\mathcal{U}$ rozdělíme ma tři podúlohy $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ a $\mathcal{U}_3$ takto:

$\mathcal{U}_1$ — zakážeme hranu e_1;
$\mathcal{U}_2$ — vynutíme hranu e_1 a zakážeme hranu e_2;
$\mathcal{U}_3$ — vynutíme hrany e_1 a e_2 a zakážeme všechny hrany $e_3, e_4, \ldots, e_k$.

Nyní platí
$$PR(\mathcal{U}) = PR(\mathcal{U}_1) \cup PR(\mathcal{U}_2) \cup PR(\mathcal{U}_3)$$
a navíc množiny přípustných řešení úloh $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ a $\mathcal{U}_3$ jsou po dvou disjunktní.

2.13 Nezávislost, kliky a barevnost grafu

2.13.1 Nezávislé množiny. Definice. Je dán neorientovaný (orientovaný) graf G. Množina vrcholů A se nazývá *nezávislá množina vrcholů*, jestliže žádná hrana grafu G nemá oba krajní vrcholy v množině A. □

Jinými slovy, podgraf indukovaný množinou A je diskrétní.

2.13.2 Maximální nezávislá množina. Definice. Je dán graf G. Nezávislá množina N se nazývá *maximální nezávislá množina*, jestliže jakákoli její nadmnožina už není nezávislá. □

Jinými slovy, nezávislá množina N je maximální nezávislá množina, jestliže pro každý vrchol v, který neleží v N, existuje vrchol $w \in N$ takový, že v G existuje hrana mezi v a w.

2.13.3 Nezávislost grafu. Definice. Je dán neorientovaný nebo orientovaný graf G. Počet vrcholů v nejpočetnější nezávislé množině grafu G se nazývá *nezávislost* grafu G a značíme jej $\alpha(G)$. □

2.13.4 Poznámky.

1) Nejpočetnější nezávislá množina je jistě také maximální, ale ne každá maximální nezávislá množina je současně nejpočetnější.
2) Jádro orientovaného grafu G definované v 2.9.10 je nezávislá množina grafu G; to vyplývá z první podmínky, kterou jádro musí splňovat. Ovšem ne každá nezávislá množina orientovaného grafu G je současně jádrem grafu G; jádro musí ještě splňovat i druhou podmínku z 2.9.10.

2.13.5 Úplný neorientovaný graf. Připomeňme pojem úplného grafu; jedná se o graf, který má nejvíce hran a je prostý a bez smyček.

Definice. Neorientovaný graf G se nazývá *úplným grafem*, jestliže je prostý, nemá smyčky a každé dva různé vrcholy jsou spojené hranou. □

Úplný neorientovaný graf G s n vrcholy má $\frac{n(n-1)}{2}$ hran.

2.13.6 Klika v grafu. Definice. Je dán neorientovaný graf G. Množina vrcholů K grafu G se nazývá *klika* v grafu G, jestliže každé dva různé vrcholy z množiny K jsou spojeny hranou a je maximální s touto vlastností. □

Jinými slovy, podgraf určený množinou vrcholů K je úplný a kdykoli v je vrchol, který neleží v množině K, tak v K existuje vrchol w, který s v spojen hranou není.

2.13.7 Doplňkový graf. Definice. Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček. Pak *doplňkový graf* grafu G je graf $G^{dop} = (V, E^{dop})$, kde

$$\{u, v\} \in E^{dop} \quad \text{právě tehdy, když} \quad u \neq v \ \text{ a } \ \{u, v\} \notin E.$$

□

2.13.8 Tvrzení. Množina N vrcholů grafu G je maximální nezávislá množina grafu G právě tehdy, když je to klika v doplňkovém grafu G^{dop}.

Množina K vrcholů grafu G je klika v grafu G právě tehdy, když je to maximální nezávislá množina doplňkového grafu G^{dop}. □