2.13.9 Obarvení grafu. Definice. Je dán neorientovaný graf G bez smyček. *Obarvení* vrcholů grafu je přiřazení barev (prvků množiny B) vrcholům grafu G a to takovým způsobem, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu. □

2.13.10 k-barevný graf. Definice. Graf G se nazývá *k-barevný*, jestliže má aspoň k vrcholů a dá se obarvit k barvami (tj. jestliže existuje obarvení grafu G takové, že množina barev B má k prvků). □

2.13.11 Barevnost grafu. Definice. Je dán neorientovaný graf G bez smyček. *Barevnost* grafu G (též *chromatické číslo* grafu G) je nejmenší k takové, že G je k-barevný. Barevnost grafu G značíme $\chi(G)$. □

2.13.12 Pozorování. Každá množina vrcholů, která je obarvena stejnou barvou, tvoří nezávislou množinu grafu.

Graf je jednobarevný právě tehdy, když nemá žádnou hranu.

2.13.13 Tvrzení. Graf G je dvoubarevný právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky. □

Zdůvodnění. Jestliže je graf G obsahuje kružnici liché délky, pak není možné jej obarvit dvěma barvami (k obarvení kružnice liché délky je třeba 3 barev).

Druhou implikaci dokazuje následující postup, jak zjistit, že daný graf je dvoubarevný.

Metoda zjištění, zda graf je dvoubarevný. Zjistit, zda je daný graf dvoubarevný, se dá jednoduchou modifikací prohledávání do šířky. Jestliže graf není souvislý, obarvíme každou komponentu souvislosti zvlášť. Budeme se proto nyní zabývat jen souvislými grafy.

Souvislý graf G prohledáme do šířky. Vrcholům, které ležely v sudých hladinách, přiřadíme barvu 1; vrcholům, které ležely v lichých hladinách, přiřadíme barvu 2.

Dá se dokázat, že neobsahuje-li graf kružnici liché délky, jedná se o korektní obarvení grafu a graf je tedy dvoubarevný. To je proto, že vede-li hrana mezi dvěma vrcholy v hladinách stejné parity, obsahuje graf kružnici liché délky a není proto dvoubarevný.

2.13.14 Bipartitní grafy. Definice. Graf G se nazývá *bipartitní*, jestliže jeho množinu vrcholů můžeme rozdělit na dvě neprázdné disjunktní množiny X a Y tak, že každá hrana má jeden krajní vrchol v množině X a druhý krajní vrchol v množině Y. □

2.13.15 Tvrzení. Graf G je bipartitní právě tehdy, když je dvoubarevný. □

2.13.16 Poznámka. Zjistit, zda daný graf je tříbarevný, je těžký problém (nezná se pro jeho řešení rychlý algoritmus).

2.13.17 Tvrzení. Pro každý prostý graf G, který má m hran platí

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

□

Myšlenka důkazu. Jestliže graf má barevnost k, pak je k-barevný, to znamená, že je možné jeho vrcholy rozdělit do k disjunktních množin, kde každá množina je nezávislá. Máme tedy nezávislé množiny vrcholů $N_1, \ldots, N_k$. Kdyby mezi některými z těchto množin nevedla žádná hrana, byl by G i $k-1$ barevný, což není. Tedy mezi každými dvěma množinami N_i a N_j $(i \neq j)$ vede hrana. Proto $m \geq \frac{k(k-1)}{2}$, úpravou dostáváme odhad z věty. □

2.13.18 Tvrzení. Označme Δ největší stupeň vrcholu grafu G. Pak

$$\chi(G) \leq \Delta + 1.$$

$\square$

Předchozí tvrzení dokážeme tím, že uvedeme postup, jak graf G obarvit $\Delta(G) + 1$ barvami.

2.13.19 Sekvenční barvení. Následující postup obarví graf $\Delta + 1$ barvami. Označme množinu barev $B = \{1, \ldots, \Delta + 1\}$.

1. Seřadíme vrcholy grafu do posloupnosti (libovolně)

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

2. Probíráme vrcholy v tomto pořadí a vrcholu v_i přiřadíme vždy tu nejmenší barvu, kterou nemá žádný jeho soused.

2.13.20 Poznámka. Algoritmus sekvenčního barvení dává horní odhad pro barevnost grafu. Jedná se ovšem o odhad, který může být velmi vzdálen od barevnosti grafu. Přesněji, existují dvoubarevné grafy, které při nevhodném uspořádání vrcholů v kroku 1, algoritmus obarví $\frac{n}{2}$ barvami (kde n je počet vrcholů grafu).

2.13.21 Tvrzení. Pro každý neorientovaný graf G bez smyček platí:

$$\alpha(G) + \chi(G) \leq n + 1$$

kde n je počet vrcholů grafu G. $\square$

Připomeňme, že $\alpha(G)$ je nezávislost grafu G, tj. počet vrcholů v nejpočetnější nezávislé množině grafu G.

Zdůvodnění. Vytvoříme obarvení barvami $1, 2, \ldots, \alpha(G) + 1$ barvami. Tím dokážeme, že barevnost je nejvýše $\alpha(G) + 1$.

Vyberme nezávislou množinu N o $\alpha(G)$ vrcholech. Tuto množinu obarvíme jednou barvou. Zbývá $n - \alpha(G)$ neobarvených vrcholů. Každý z těchto vrcholů obarvíme jednou (jinou) barvou. Tím jsme dostali požadované obarvení. $\square$