2.14 Rovinné grafy

2.14.1 Nakreslení grafu. Je dán neorientovaný graf G s množinou vrcholů V a množinou hran E. *Nakreslení grafu* se skládá z přiřazení, které vrcholům grafu přiřazuje různé body roviny a hranám přiřazuje křivky a to tak, že 1. různým hranám jsou přiřazeny různé křivky, a 2. jestliže hrana e vede mezi vrcholy u, v, pak křivka odpovídající e vede mezi body odpovídajícími vrcholům u, v. Formálně:
Definice. Nakreslení grafu $G = (V, E, \varepsilon)$ je dvojice prostých zobrazení f, g, takových, že f přiřazuje vrcholům $v \in V$ body eukleidovské roviny, g přiřazuje hranám prosté křivky a to tak, že platí

$$\text{je-li } \varepsilon(e) = \{x, y\}, \text{ pak } g(e) \text{ má krajní body } f(x) \text{ a } f(y).$$

□

2.14.2 Rovinné nakreslení grafu. Definice. Nakreslení grafu G se nazývá *rovinné*, jestliže se křivky odpovídající různým hranám nekříží (tj. jestliže dvě křivky, které odpovídají dvěma různým hranám, mají společné nejvýše krajní body). □

2.14.3 Rovinný (planární) graf. Definice. Graf G se nazývá *rovinný*, jestliže má rovinné nakreslení. □

Jinými slovy, graf je rovinný, jestliže je možné ho nakreslit v rovině tak, aby se jeho hrany „nekřížily“.

Poznamenejme, že i rovinný graf se dá (často) nakreslit tak, aby se křivky odpovídající jeho hranám křížily. K tomu, aby graf byl rovinný, stačí, abychom našli jedno jeho nakreslení, které je rovinné.

2.14.4 Definice. Rovinný graf spolu se svým rovinným nakreslením se nazývá *topologický rovinný graf*. □

2.14.5 Nakreslení grafu na kulové ploše. Stejně jako jsme v **??** a **??** definovali nakreslení grafu v rovině, můžeme definovat nakreslení grafu (rovinné nakreslení grafu) na kulové ploše. Nedostaneme tím ovšem nic nového – grafy, které je možno nakreslit aniž by se jejich hrany křížily na kulové ploše, jsou přesně rovinné grafy z definice **??**.

2.14.6 Stěna grafu. Definice. Je dáno rovinné nakreslení grafu G. *Stěna topologického rovinného grafu G* je minimální část roviny, která je ohraničena křivkami odpovídajícími hranám grafu. Jedna ze stěn je vždy neomezená, ostatní jsou omezené. Dvě stěny jsou *sousední*, jestliže společná část jejich hranice je tvořena jednou nebo více křivkami odpovídajícími hranám grafu.

Řekneme, že *stěna je incidentní s hranou*, jestliže křivka odpovídající hraně je částí hranice stěny nebo celá ve stěně leží.

Stupeň stěny je počet hran s nimiž je stěna incidentní s tím, že každou hranu, která leží celá v jedné stěně, počítáme dvakrát. □

2.14.7 Tvrzení. Sečteme-li stupně všech stěn rovinného grafu, dostaneme dvojnásobek počtu hran. □

2.14.8 Věta (Eulerova formule). Pro každý souvislý rovinný graf, který má n vrcholů, m hran a s stěn, platí

$$n + s = m + 2.$$

□

Zdůvodnění. Každý souvislý graf má kostru. Kostra má o jednu hranu méně než je počet jejích vrcholů, a navíc má jen jednu stěnu – neomezenou. Tedy pro kostru tvrzení platí.

Přidáním libovolné hrany k již souvislému grafu zvětšíme počet stěn o 1; ano, jednu stěnu rozdělíme na dvě. Tvrzení proto platí pro každý souvislý graf. □

2.14.9 Věta. Je dán prostý souvislý rovinný graf bez smyček s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami, pak platí

$$m \leq 3n - 6.$$

□

Zdůvodnění. Jestliže G je rovinný, souvislý, prostý a bez smyček, má každá stěna stupeň alespoň 3. Přitom součet všech stupňů stěn je roven dvakrát počtu hran. Máme proto $2m \geq 3s$, tedy $s \leq \frac{2}{3}\, m$. Dosazením do Eulerovy formule dostáváme

$$m + 2 = n + s \leq n + \frac{2}{3}m, \;\text{ tj. }\; 3m + 6 \leq 3n + 2m,$$

Poslední nerovnost dává $m \leq 3n - 6$.

2.14.10 Věta. Je dán prostý souvislý rovinný graf bez smyček a trojúhelníků s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami, pak platí

$$m \leq 2n - 4.$$

□

Zdůvodnění. Toto tvrzení se dokazuje obdobně jako předchozí; pouze v případě, že graf G neobsahuje trojúhelník, má každá stěna stupeň alespoň 4. Z tohoto vztahu dostáváme $2m \geq 4s$, tj. $s \leq \frac{1}{2}\, m$ a

$$m + 2 \leq n + \frac{1}{2}m, \;\text{ tj. }\; m \leq 2n - 4.$$

□

2.14.11 Věta. V každém prostém rovinném grafu G bez smyček existuje vrchol v, který má stupeň nejvýše 5. □

Zdůvodnění. Ukážeme, že každý prostý rovinný graf má v každé komponentě souvislosti aspoň jeden vrchol stupně nejvýše 5. To je zřejmé pro komponenty s nejvýše 6 vrcholy. Pro komponenty s aspoň 7 vrcholy tvrzení dokážeme sporem.

Předpokládejme, že by existovala komponenta souvislosti prostého rovinného grafu bez smyček, kde každý vrchol by měl stupeň alespoň 6. Pak by platilo

$$2m \geq 6n, \text{ tj. } m \geq 3n > 3n - 6,$$

což je ve sporu s větou **??**. □

2.14.12 Tvrzení. Úplný neorientovaný graf K_5 na 5 vrcholech není rovinný.

Zdůvodnění. Stačí si uvědomit, že K_5 má $n = 5$ vrcholů a $m = 10$ hran, přitom je prostý a bez smyček. Nesplňuje tedy **??**. □

2.14.13 Tvrzení. Úplný bipartitní graf se stranami o třech vrcholech $K_{3,3}$ není rovinný. □

Zdůvodnění. Stačí si uvědomit, že $K_{3,3}$ má $n = 6$ vrcholů a $m = 9$ hran, přitom je prostý a bez smyček a bez trojúhelníků. Nesplňuje tedy **??**.

2.14.14 Věta o čtyřech barvách. Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit čtyřmi barvami. □

Věta o čtyřech barvách byla dlouho nedokázaná. Nakonec ve druhé polovině minulého století byla dokázána s pomocí počítačů.