Příklady z grafů

Marie Demlová

1 Minimální kostra

1.1 Příklad.

a) Definujte kostru neorientovaného grafu.

b) Popište Kruskalův algoritmus na nalezení minimální kostry.

c) Kruskalův algoritmus použijte na ohodnocený neorientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, 8\}$, kde následující matice uvádí délky (ceny) jednotlivých hran

$$\begin{pmatrix} - & 7 & - & 6 & 8 & 15 & 4 & - \\ 7 & - & 2 & 9 & 6 & - & 3 & 11 \\ - & 2 & - & 3 & - & 9 & - & - \\ 6 & 9 & 3 & - & 5 & 9 & 6 & 1 \\ 8 & 6 & - & 5 & - & 13 & 13 & 11 \\ 15 & - & 9 & 9 & 13 & - & 8 & - \\ 4 & 3 & - & 6 & 13 & 8 & - & 7 \\ - & 11 & - & 1 & 11 & - & 7 & - \end{pmatrix}$$

Výsledek. Cena minimální kostry: 26; hrany jedné minimální kostry: $\{1,7\}, \{2,7\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{4,8\}, \{4,5\}, \{6,7\}$.

1.2 Příklad.

a) Definujte minimální kostru neorientovaného ohodnoceného grafu.

b) Popište Primův algoritmus na nalezení minimální kostry.

c) Primův algoritmus použijte na ohodnocený neorientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, 8\}$, kde následující matice uvádí délky (ceny) jednotlivých hran

$$\begin{pmatrix} - & 14 & 5 & 12 & 7 & - & - & 2 \\ 14 & - & 4 & 14 & 12 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & - & 5 & 1 & - & 15 & - \\ 12 & 14 & 5 & - & 10 & - & - & 5 \\ 7 & 12 & 1 & 10 & - & 1 & 4 & - \\ - & 4 & - & - & 1 & - & 10 & 2 \\ - & 2 & 15 & - & 4 & 10 & - & 12 \\ 2 & 3 & - & 5 & - & 2 & 12 & - \end{pmatrix}$$

Výsledek. Cena minimální kostry: 16; hrany jedné minimální kostry: $\{1,8\}, \{6,8\}, \{5,6\}, \{3,5\}, \{2,8\}, \{7,2\}, \{4,3\}$.

2 Topologické očíslování a acyklické grafy

2.1 Příklad.

a) Napište, co je to topologické očíslování vrcholů a topologické očíslování hran.

b) Najděte topologické očíslování vrcholů následujícího orientovaného grafu G, který je dán seznamem hran

PV	1	2	2	3	3	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7
KV	12	1	10	2	4	10	12	2	5	9	10	11	1	2	3

PV	7	7	7	9	9	10	10	11	11
KV	5	10	12	1	8	1	12	4	10

c) Najděte jádro grafu G.

Výsledek. Topologické očíslování je např.

$$6, 7, 9, 11, 3, 5, 8, 2, 4, 10, 1, 12.$$

Jádro je $K = \{2, 4, 8, 12\}$.

2.2 Příklad.

a) Popište lineární algoritmus pro nalezení topologického očíslování vrcholů.

b) Algoritmus z bodu b) použijte na orientovaný graf G daný seznamem hran

PV	2	3	3	4	5	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8
KV	5	2	5	11	4	3	4	2	3	6	9	11	2	3	4	5

PV	9	9	12	12	12	12	12	12
KV	3	11	1	3	4	5	9	11

c) Definujte jádro grafu. Najděte jádro grafu G.

Výsledek. Topologické očíslování je např.

$$7, 8, 10, 12, 6, 1, 9, 3, 2, 5, 4, 11.$$

Jádro je $K = \{1, 5, 6, 10, 11\}$.

3 Silně souvislé komponenty grafu

3.1 Příklad.

a) Definujte silně souvislou komponentu v orientovaném grafu.

b) Najděte silně souviské komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \ldots, 10\}$, E je dána tabulkou

PV	1	1	2	2	3	3	4	5	5	5	6	6	6	7	8	8	9	9	10	10
KV	3	10	3	5	1	5	6	1	2	7	4	7	9	6	4	9	7	8	1	8

c) Nakreslete kondenzaci tohoto grafu.

Výsledek. Dvě komponenty silné souvislosti: $K_1 = \{1, 2, 3, 5, 10\}$ a $K_2 = \{4, 6, 7, 8, 9\}$.

3.2 Příklad.

a) Definujte silně souvislou komponentu v orientovaném grafu.

b) Najděte silně souviské komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \ldots, 10\}$, E je dána tabulkou

PV	1	2	2	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	7	8
KV	7	1	12	4	3	6	9	10	1	4	9	10	7	10	3	5

PV	9	9	9	9	10	11	11
KV	3	6	10	11	11	3	9

c) Nakreslete kondenzaci tohoto grafu.

Výsledek. Šest komponent silné souvislosti: $K_1 = \{3, 4, 6, 7, 9, 10, 11\}$, $K_2 = \{1\}$, $K_3 = \{12\}$, $K_4 = \{2\}$, $K_5 = \{5\}$ a $K_6 = \{8\}$.

4 Eulerovské tahy

4.1 Příklad.

a) Definujte uzavřený eulerovský tah.

b) Navrhněte postup jak v orientovaném souvislém grafu najdete uzavřený eulerovský tah.

c) Postup z bodu e) použijte na graf daný seznamem hran (postup začněte ve vrcholu 1)

PV	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
KV	2	3	6	3	4	7	1	4	1	5	1	7	2	5	6	8	2

Výsledek. Uzavřený eulerovský tah je např.: $(1, 2), 2, 7)$, $(7, 6)$, $(6, 5)$, $(5, 7)$, $(7, 8)$, $(8, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$, $(1, 6)$, $(6, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 1)$.

5 Nejkratší hamiltonovské cesty

5.1 Příklad.

a) Definujte neorientovanou hamiltonovskou cestu.

b) Metodou větví a mezí najděte nejkratší hamiltonovskou cestu v ohodnoceném úplném grafu, kde délky hran jsou dány následující maticí:

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 3 & 8 & 6 & 17 \\ 10 & - & 18 & 5 & 14 & 15 \\ 3 & 18 & - & 14 & 11 & 4 \\ 8 & 5 & 14 & - & 13 & 19 \\ 6 & 14 & 11 & 13 & - & 14 \\ 17 & 15 & 4 & 19 & 14 & - \end{pmatrix}$$

Výsledek. Hamiltonovská cesta se skládá z těchto hran: $\{6, 3\}$, $\{3, 1\}$, $\{1, 5\}$, $\{5, 4\}$ a $\{4, 2\}$. Její délka je 31.

5.2 Příklad.

a) Definujte neorientovanou hamiltonovskou cestu.

b) Metodou větví a mezí najděte nejkratší hamiltonovskou cestu v ohodnoceném úplném grafu, kde délky hran jsou dány následující maticí:

$$\begin{pmatrix} - & 13 & 20 & 3 & 16 & 20 \\ 13 & - & 8 & 10 & 2 & 7 \\ 20 & 8 & - & 18 & 16 & 19 \\ 3 & 10 & 18 & - & 17 & 15 \\ 16 & 2 & 16 & 17 & - & 5 \\ 20 & 7 & 19 & 15 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Výsledek. Hamiltonovská cesta se skládá z těchto hran: $\{1,4\}$, $\{4,6\}$, $\{6,5\}$, $\{5,2\}$ a $\{2,3\}$. Její délka je 33.