Kapitola 2

Příklady z predikátové logiky

2.1 Formule predikátové logiky

2.1.1 Příklad. Napište formule predikátové logiky odpovídající následujícím větám. Použijte k tomu predikátových symbolu uvedených v textu.

a) Někdo má hudební sluch (S) a někdo nemá hudební sluch.

b) Některé děti (D) nerady čokoládu (C).

c) Nikdo, kdo nebyl poučen o bezpečnosti práce (P), nesmí pracovat v laboratořích (L).

d) Ne každý talentovaný malíř (T) vystavuje obrazy v Národní galerii (G).

e) Pouze studenti (S) mají nárok na studené večeře (V).

f) Ne každý člověk (C), který má drahé lyže (D), je špatný lyžař (S).

Výsledek: a) $(\exists x\, S(x)) \wedge (\exists x\, \neg S(x))$;
b) $\exists x\, (D(x) \wedge \neg C(x))$;
c) $\forall x\, (\neg P(x) \Rightarrow \neg L(x))$;
d) $\neg(\forall x\, (T(x) \Rightarrow G(x)))$;
e) $\forall x\, (V(x) \Rightarrow S(x))$;
f) $\neg[\forall x\, ((C(x) \wedge D(x)) \Rightarrow S(x))]$.

2.1.2 Příklad. Pro následující věty popište jazyk predikátové logiky (tj. predikáty, konstantní symboly a funkční symboly), který potřebujete k formalizaci a napište formule odpovídajících vět.

a) Karel viděl Shakespearovu hru Hamlet.

b) Karel viděl některou Shakespearovu hru.

c) Někdo viděl Shakespearovu hru Hamlet.

d) Někdo viděl některou Shakespearovu hru.

e) Ne každý viděl některou Shakespearovu hru.

f) Karel viděl pouze hry od Shakespeara.

g) Lucernu nenapsal Shakespeare.

Výsledek: Naše universum U tvoří lidé a hry. Pro první čtyři věty by stačil tento jazyk $\mathcal{L}$: $\mathsf{Pred} = \{V\}$, kde V je ternární predikátový symbol, kde $V(x, y, z)$ má význam: „osoba x viděla hru y od autora z“. (Tj. na druhém místě trojice (x, y, z) musí být hra, na prvním a třetím musí být osoba.) Dále $\mathsf{Konst} = \{k, h, s\}$, kde k je osoba Karel, h je hra Hamlet a s je Shakespeare. Formule mají tvar:
a) $V(k, h, s)$; b) $\exists y\, V(k, y, s)$; c) $\exists x\, V(x, h, s)$; d) $\exists x\, \exists y\, V(x, y, s)$.

Chceme-li popsat všechny věty, zavedeme jiné predikátové symboly: Naše universum U je stejné. $\mathsf{Pred} = \{H, O, V, N\}$, kde H a O jsou unární predikáty, H znamená „být hrou“, O znamená „být osobou“, $V(x, y)$ a $N(x, y)$ jsou binární predikáty: $V(x, y)$ znamená „osoba x viděla hru y“ a $N(x, y)$ znamená „osoba x napsala hru y“. Dále $\mathsf{Konst} = \{k, h, s, l\}$, kde k je „Karel“, h je „Hamlet“, s je „Shakespeare“ a l je „Lucerna“. Formule mají tvar:
a) $N(s, h) \wedge V(k, h)$;
b) $\exists x\, (H(x) \wedge V(k, x) \wedge N(s, x))$;
c) $\exists x\, (O(x) \wedge V(x, h) \wedge N(s, h))$;
d) $\exists x\, \exists y\, (O(x) \wedge H(y) \wedge V(x, y) \wedge N(s, y))$;
e) $\neg[\forall x\, (O(x) \Rightarrow (\exists y\, (H(y) \wedge V(x, y) \wedge N(s, y)))]$;
f) $\forall x\, [(H(x) \wedge V(k, x)) \Rightarrow N(s, x)]$;
g) $\neg N(s, l)$.

2.1.3 Příklad. Popište interpretaci, kterou potřebujete, abyste zformalisovali následující věty jako sentence predikátového počtu.

a) Čtverec lichého čísla je vždy liché číslo.

b) Je-li libovolné číslo dělitelné šesti, je dělitelné i třemi.

c) Existují čísla a, b, c taková, že součet druhých mocnin a a b je roven druhé mocnině c.

Výsledek: a) $U = \mathbb{Z}$, $\mathsf{Pred} = \{L\}$, kde L znamená „být lichý“, $\mathsf{Func} = \{o\}$, kde $o(x)$ je čtverec čísla x. Formule má tvar $\forall x\, (L(x) \Rightarrow L(o(x)))$.

b) $U = \mathbb{Z}$, $\mathsf{Pred} = \{P, Q\}$, kde P znamená „být dělitelný 6“, Q znamená „být dělitelný 3“. Formule má tvar $\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x))$.

c) $U = \mathbb{Z}$, $\mathsf{Pred} = \{R\}$, R je binární predikátový symbol a má význam rovnosti, $\mathsf{Func} = \{o, s\}$, kde $o(x)$ je unární a znamená čtverec čísla x a $s(x, y)$ je binární a znamená součet čísel x a y. Formule má tvar $\exists x\, \exists y\, \exists z\, R(s(o(x), o(y)), o(z))$. (Kdybychom zavedli rovnost jako predikátový symbol $=$, který má vždy význam rovnosti, mohli bychom formuli psát ve tvaru: $\exists x\, \exists y\, \exists z\, s(o(x), o(y)) = o(z)$.)

2.1.4 Příklad. V následujících formulích označte všechny vázané výskyty proměnných a všechny volné výskyty proměnných. Které z formulí jsou sentence a které otevřené formule?

a) $\forall x\, \exists y\, Q(x, y)$;

b) $Q(f(a,b),y) \Rightarrow (\exists y\, P(s(y)))$;

c) $Q(a,b) \vee (\forall x\, Q(a,x))$;

d) $Q(x,y) \Rightarrow Q(y,x)$;

e) $Q(a,b) \wedge (\exists x\, \exists y\, Q(x,y))$;

f) $(\forall x\, Q(a,x)) \Rightarrow (\forall x\, \exists y\, Q(y,x))$.

2.2 Sémantika predikátové logiky

2.2.1 Příklad. Speciální symboly jazyka $\mathscr{L}$ predikátové logiky jsou tyto: $\mathsf{Pred} = \{P, Q\}$, kde P je unární a Q je binární predikátový symbol, $\mathsf{Func} = \{f, g\}$, kde f je unární a g je binární funkční symbol, $\mathsf{Konst} = \{a, b, c\}$.

Je dána interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, kde U je množina přirozených čísel; $[\![a]\!] = 0$, $[\![b]\!] = 1$, $[\![c]\!] = 3$,
$[\![f]\!]\colon n \mapsto n^2$, tj. f odpovídá povýšení na druhou,
$[\![g]\!]\colon (m,n) \mapsto m+n$, tj. g odpovídá součtu,
$[\![P]\!] = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tj. P odpovídá vlastnosti „být sudým“,
$[\![Q]\!] = \{(m,n) \mid m \text{ je dělitelem } n\}$, tj. Q odpovídá relaci „dělitelnosti“.

Rozhodněte o pravdivosti nebo nepravdivosti následujících sentencí:

a) $P(c)$;

b) $P(f(a))$;

c) $P(g(a, f(b)))$;

d) $Q(a, f(b))$;

e) $Q(f(b), a)$;

f) $\forall x\, Q(x,x)$;

g) $\exists x\, Q(f(x), x)$;

h) $\forall x\, (Q(c,x) \Rightarrow Q(b,x))$;

i) $\forall x\, (Q(b,x) \Rightarrow Q(c,x))$;

j) $\exists x\, (P(f(x)) \wedge P(x))$;

k) $\exists x\, \exists y\, (P(x) \wedge P(y) \wedge P(g(x,y)))$;

l) $\exists x\, \exists y\, (\neg P(x) \wedge \neg P(y) \wedge P(g(x,y)))$.

Výsledek: a) Nepravdivá; b) pravdivá; c) nepravdivá; d) nepravdivá; e) pravdivá; f) nepravdivá (protože 0 nedělí 0); g) pravdivá; h) pravdivá; i) nepravdivá; j) pravdivá; k) pravdivá; l) pravdivá.

2.2.2 Příklad. Pro následující sentence rozhodněte, zda se jedná o tautologie, kontradikce nebo splnitelné sentence, které nejsou tautologie. (P je unární predikátový symbol, Q je binární predikátový symbol.)

a) $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, \neg P(x))$;

b) $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$;

c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$;

d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$;

e) $\forall x\, [\exists y\, Q(x, y) \vee \forall z\, \neg Q(x, z)]$.

Výsledek: a) Tautologie. b) Tautologie.
c) Splnitelná formule, která není tautologie. Zduvodnění: Sentence $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$ je pravdivá kdykoli je nepravdivá sentence $\exists x\, P(x)$. Uvažujme interpretaci: U je množina reálných čísel, predikátový symbol P odpovídá vlastnosti „být odmocninou z -1“. Protože žádné reálné číslo vlastnost $[\![P]\!]$ nemá, je naše sentence pravdivá v $\langle U, [\![-]\!]\rangle$. Na druhé straně uvažujme interpretaci: U' je množina přirozených čísel, P odpovídá vlastnosti „být sudý“. Pak formule $\exists x\, P(x)$ je pravdivá v této interpretaci, protože existuje sudé přirozené číslo. Formule $\forall x\, P(x)$ ovšem pravdivá není, protože ne všechna přirozená čísla jsou sudá. Tedy formule $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$ není pravdivá v této interpretaci.
d) Kontradikce. e) Tautologie.

2.2.3 Příklad. K formuli φ nalezněte formuli ψ tautologicky ekvivalentní s formulí $\neg\varphi$ a takovou, že ψ má negace pouze těsně před atomickými formulemi. (P je unární predikátový symbol, R je binární predikátový symbol a a je konstantní symbol.)

a) $\forall x\, [P(x) \Rightarrow (\exists y\, (P(y) \wedge R(x, y)))]$;

b) $P(a) \vee [\exists z\, (P(z) \wedge \forall y\, (R(y, z) \Rightarrow \neg P(y)))]$.

Výsledek: a) $\exists x\, [P(x) \wedge \forall y\, (\neg P(y) \vee \neg R(x, y))]$;
b) $\neg P(a) \wedge [\forall z\, (\neg P(z) \vee (\exists y(R(y, z) \wedge P(y))))]$.

2.2.4 Příklad. Rozhodněte, zda následující množiny sentencí jsou splnitelné nebo nesplnitelné. Zduvodněte. (P a R jsou unární predikátové symboly, Q je binární predikátový symbol.)

a) $S = \{\forall x\, \exists y\, Q(x, y), \forall x\, \neg Q(x, x)\}$;

b) $M = \{\exists x\, \forall y\, Q(x, y), \forall x\, \neg Q(x, x)\}$;

c) $N = \{\forall x\, (P(x) \vee R(x)), \neg\exists x\, R(x), \neg P(a)\}$.

Výsledek: a) S je splnitelná. Její model je např. tato interpretace: $U = \mathbb{N}$, $[\![Q]\!]$ je relace $<$ na množině $\mathbb{N}$, tj. $[\![Q]\!] = \{(m, n) \mid m < n\}$. Pak pro každé přirozené číslo n existuje číslo větší (např. $n + 1$) a žádné přirozené číslo není větší než ono samo.

b) M je nesplnitelná. „Přečtěme si“ první formuli: „Existuje prvek, řekněme d, takový, že pro každý prvek y dvojice (d, y) má vlastnost Q.“ Dosadíme-li za y

prvek d, má dvojice (d, d) také vlastnost Q. Tudíž není možné aby byla pravdivá druhá formule množiny M, která říká: „Pro žádný prvek x dvojice (x, x) nemá vlastnost Q.“

Formálně: Vezměme libovolnou interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž je pravdivá formule $\exists x\, \forall y\, Q(x, y)$. Pak existuje prvek $d \in U$, tak, že pro každý prvek $d' \in U$ dvojice $(d, d') \in [\![Q]\!]$. Proto také $(d, d) \in [\![Q]\!]$. To ovšem znamená, že sentence $\forall x\, \neg Q(x, x)$ není pravdivá v $\langle U, [\![-]\!]\rangle$.

c) N je nesplnitelná. „Přečtěme si“ první a třetí sentenci: „Každý prvek má vlastnost P nebo vlastnost R.“ „Prvek a nemá vlastnost P.“ Jsou-li obě tyto sentence pravdivé v některé interpretaci, pak v této interpretaci musí prvek a mít vlastnost R. To ovšem znamená, že není pravdivá druhá sentence: „Žádný prvek nemá vlasntost R.“

Formálně: Vezměme libovolnou interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž je pravdivá první a třetí sentence. Pak existuje prvek $d \in U$ $(d = [\![a]\!])$ takový, že $d \notin [\![P]\!]$. Protože je pravdivá sentence $\forall x\, (P(x) \vee R(x))$, musí být pravdivá sentence $P(a) \vee R(a)$. To ale znamená, že je pravdivá i $R(a)$ a tudíž $d = [\![a]\!] \in [\![R]\!]$. Tedy sentence $\forall x\, \neg R(x)$ je nepravdivá v $\langle U, [\![-]\!]\rangle$.

2.3 Rezoluční metoda v predikátové logice

2.3.1 Příklad. Pro každé dva následující literály rozhodněte, zda existuje substituce, po níž se stanou stejnými literály. V kladném případě najděte nejobecnější takovou substituci.

a) $(P(x, y),\ P(t, f(z))$;

b) $Q(a, y, f(y)),\ Q(z, z, u)$;

c) $R(x, g(x)),\ R(y, y)$;

d) $F(a, x),\ F(y, b)$;

e) $Q(x, f(y), z),\ Q(g(w), u, g(w))$;

f) $P(g(x), y),\ P(u, f(w))$.

Výsledek: a) Po substituci $\theta = \{x/t, y/f(z)\}$ z obou literálu vznikne literál $P(t, f(z))$.

b) Po substituci $\theta = \{z/a, y/a, u/f(a)\}$ z obou literálu vznikne literál $Q(a, a, f(a))$.

c) Taková substituce neexistuje.

d) Po substituci $\theta = \{y/a, x/b\}$ z obou literálu vznikne literál $F(a, b)$.

e) Po substituci $\theta = \{x/g(w), u/f(y), z/g(w)\}$ z obou literálu vznikne literál $Q(g(w), f(y), g(w))$.

f) Po substituci $\theta = \{u/g(x), y/f(w)\}$ z obou literálu vznikne literál $P(g(x), f(w))$.

2.3.2 Příklad. Najděte všechny rezolventy následujících klausulí.

a) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (P(x, y) \vee Q(y, z)),\ \forall u\, \neg P(u, f(u))$;

b) $\forall x\, (P(x, x) \vee \neg Q(x, f(x))),\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, (Q(x, y) \vee R(y, z))$;

c) $\forall x\,\forall y\,(P(x,y) \vee \neg Q(y,x)),\ \forall x\,\forall y\,(Q(x,x) \vee P(y,f(x)))$;

d) $\forall x\,\forall y\,\forall y(P(x,y) \vee \neg S(x,x) \vee T(x,f(x),z)),\ \forall x\,\forall z\,(\neg T(f(x),x,z) \vee S(x,z))$;

e) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\neg Q(x,y,z) \vee \neg Q(y,y,y)),\ \forall x\,\forall z\,\forall t\,(Q(x,f(x),z) \vee Q(z,t,t))$.

Výsledek: a) $\forall z\,\forall u\,Q(f(u),z)$;
b) $\forall x\,\forall z\,(P(x,x) \vee R(f(x),z))$;
c) $\forall x\,\forall z\,(P(x,x) \vee P(z,f(x)))$, uvědomte si, že jsme nejprve přejmenovali proměnné tak, že naše klauzule jsou $\forall x\,\forall y\,(P(x,y) \vee \neg Q(y,x))$ a $\forall z\,\forall t\,(Q(t,t) \vee P(z,f(t)))$, pak hledaná substituce je $\theta = \{y/x, t/x\}$;
d) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(P(x,y) \vee T(x,f(x),z) \vee \neg T(f(x),x,x))$ (z literálu $T(x,f(x),z)$ a $\neg T(f(x),x,z)$ žádnou substitucí nevzniknou komplementární literály). Zase si je dobré uvědomit, že nejprve musíme přejmenovat proměnné tak, abychom v obou klauzulích měli ruzná jména proměnných;
e) $\forall x\,\forall z\,\forall t\,(\neg Q(f(x),f(x),f(x)) \vee Q(z,t,t)),\ \forall y\,\forall t\,\forall v\,(\neg Q(y,y,y) \vee Q(t,f(t),v)),\ \forall x\,\forall y\,\forall z\,\forall t\,(\neg Q(x,y,z) \vee Q(t,f(t),y))$.

2.3.3 Příklad. Následující formule převeďte na klausální tvar.

a) $\forall x\,[\exists y\,(Q(x,y) \vee \neg P(x,y)) \wedge \exists y\,(\neg Q(y,x) \vee P(y,x))]$;

b) $\forall x\,[(\exists y\,(P(x,y) \wedge \neg Q(y,x))) \vee \forall y\,\exists z\,R(x,y,z)]$;

c) $\neg \forall x\,[\exists y\,Q(x,y) \Rightarrow \forall y\,\exists z\,\neg P(x,y,z)]$;

d) $\exists x\,S(x) \Rightarrow [\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x\,\exists y\,T(x,y)]$.

Výsledek: a) Formule je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná formule: $[\forall x\,(Q(x,f(x)) \vee \neg P(x,f(x)))] \wedge [\forall x\,(\neg Q(g(x),x) \vee P(g(x),x))]$ a to je právě tehdy, když je splnitelná tato množina klausulí:
$\{\forall x\,(Q(x,f(x)) \vee \neg P(x,f(x))), \forall x\,(\neg Q(g(x),x) \vee P(g(x),x))\}$. Zde f a g jsou unární skolemizační funkční symboly.

b) Formule je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná formule:
$\forall x\,\forall t\,[(P(x,f(x)) \vee R(x,t,g(x,t))) \wedge (\neg Q(f(x),x) \vee R(x,t,g(x,t)))]$
a to je právě tehdy, když je splnitelná tato množina klausulí:
$\{\forall x\,\forall t\,(P(x,f(x)) \vee R(x,t,g(x,t))), \forall x\,\forall t\,(\neg Q(f(x),x) \vee R(x,t,g(x,t)))\}$.
Zde f je unární a g je binární skolemizační funkční symbol. Tento výsledek odpovídá převedení na formuli:
$\forall x\,\exists y\,\forall t\,\exists z\,[(P(x,y) \vee R(x,t,z)) \wedge (\neg Q(y,x) \vee R(x,t,z))]$.

c) Formule je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná formule:
$Q(a,b) \wedge \forall z\,P(a,c,z)$
a to je právě tehdy, když je splnitelná tato množina klausulí:
$\{Q(a,b), \forall z\,P(a,c,z)\}$.
Zde a, b a c jsou skolemizační konstantní symboly.

d) Formule je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná formule:
$\exists y\,\forall z\,\exists t\,\forall x\,[(\neg S(x) \vee T(z,t) \vee \neg P(y)) \wedge (\neg S(x) \vee T(z,t) \vee \neg Q(y))]$ a také formule:
$\forall z\,\forall x\,[(\neg S(x) \vee T(z,f(z)) \vee \neg P(a)) \wedge (\neg S(x) \vee T(z,f(z)) \vee \neg Q(a))]$
a to je právě tehdy, když je splnitelná tato množina klausulí:
$\{\forall x\,\forall z\,(\neg S(x) \vee T(z,f(z)) \vee \neg P(a)), \forall x\,\forall z\,(\neg S(x) \vee T(z,f(z)) \vee \neg Q(a))\}$.
Zde f je unární skolemizační funkční symbol a a je skolemizační konstanta.

2.3.4 Příklad. Rezoluční metodou rozhodněte, zda platí:

a) $$\frac{\begin{array}{l}\forall x\,(P(x) \vee Q(x))\\ \exists x\,\neg P(x)\end{array}}{\exists x\,Q(x)}$$

b) $$\frac{\begin{array}{l}\exists x\,\forall y\,P(x,y)\\ \forall x\,\forall y\,(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))\end{array}}{\exists x\,\forall y\,Q(x,y)}$$

c) $$\frac{(\exists x\,P(x)) \Rightarrow Q(a)}{\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(a))}$$

Výsledek: a) Úsudek je správný: Množina klausulí $S = \{\forall x\,(P(x) \vee Q(x)), \neg P(a), \forall y\,\neg Q(y)\}$ je nesplnitelná, neboť $F \in R^2(S)$.

b) Úsudek je správný: Množina klausulí $S = \{\forall y\,P(a,y), \forall x\,\forall z\,(\neg P(x,z) \vee Q(x,z)), \forall t\,\neg Q(t, f(t))\}$ je nesplnitelná, neboť $F \in R^2(S)$.

c) Úsudek je správný: Množina klausulí $S = \{\forall x\,(\neg P(x) \vee Q(a)), P(b), \neg Q(a)\}$ je nesplnitelná, neboť $F \in R^2(S)$.

2.3.5 Příklad. Rezoluční metodou ověřte správnost úsudku:

$$\frac{\begin{array}{l}P(b) \Rightarrow V(a)\\ (\forall x\,V(x)) \vee (\forall x\,\neg V(x))\\ P(b)\end{array}}{\forall x\,V(x)}$$

kde P je unární predikátový symbol, V je unární predikátový symbol a a, b jsou konstantní symboly.

Výsledek: a) Úsudek je správný: Množina klausulí $S = \{\neg P(b) \vee V(a), \forall x\,\forall y\,(V(x) \vee \neg V(y)), P(b), \neg V(b)\}$ je nesplnitelná, neboť $F \in R^3(S)$.

2.3.6 Příklad. Následující úsudek zformalizujte a rezoluční metodou rozhodněte, zda je správný.

a) Žádný žák této třídy není hudebník.
Všichni hudebníci jsou umělci.
____
Žádný žák této třídy není umělec.

b) Žádný atlet nemá špatnou fyzickou kondici.
Někteří přítomní jsou atleti.
____
Někteří přítomní nemají špatnou fyzickou kondici.

c) Žádný atlet nemá špatnou fyzickou kondici.
Někteří přítomní nejsou atleti.
____
Někteří přítomní mají špatnou fyzickou kondici.

d) Všechny kopce jsou zdolatelné.
Některé hory nejsou zdolatelné.
____
Některé hory nejsou kopce.

e) Všichni šimpanzi mohou vyřešit každý problém.
Existuje aspoň jeden problém.
Vyřeší-li šimpanz problém, dostane banán.
Alex je šimpanz.
―――――――――――――――――
Alex dostane banán.

Výsledek: a) Značí-li $Z(x)$ ... x je žák této třídy, $H(x)$ ... x je hudebník, $U(x)$ ... x je umělec, úsudek odpovídá:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(Z(x) \Rightarrow \neg H(x)) \\ \forall x\,(H(x) \Rightarrow U(x)) \\ \hline \forall x\,(Z(x) \Rightarrow \neg U(x)) \end{array}$$

Úsudek není správný: Množina klausulí $S = \{\forall x\,(\neg Z(x) \vee \neg H(x)), \forall y\,(\neg H(y) \vee U(y)), Z(a), U(a)\}$ je splnitelná. (Platí $R^\star(S) = S \cup \{\neg H(a)\}$.)

b) Značí-li $A(x)$ ... x je atlet, $K(x)$ ... x nemá špatnou fyzickou kondici, $P(x)$ ... x je přítomen, úsudek odpovídá:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(A(x) \Rightarrow K(x)) \\ \exists x\,(P(x) \wedge A(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge K(x)) \end{array}$$

Úsudek je správný, protože množina klausulí $S = \{\forall x\,(\neg A(x) \vee K(x)), P(a), A(a), \forall y\,(\neg P(y) \vee \neg K(y))\}$
je nesplnitelná. (Platí $F \in R^2(S)$.)

c) Při stejném značení jako v minulém příkladě, úsudek odpovídá:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(A(x) \Rightarrow K(x)) \\ \exists x\,(P(x) \wedge \neg A(x)) \\ \hline \exists x\,(P(x) \wedge \neg K(x)) \end{array}$$

Úsudek není správný: Množina klausulí $S = \{\forall x\,(\neg A(x) \vee K(x)), P(a), \neg A(a), \forall y\,(\neg P(y) \vee K(y))\}$ je splnitelná. (Platí $R^\star(S) = S \cup \{\neg K(a), \forall x\,(\neg A(x) \vee \neg P(x))\}$.)

d) Značí-li $K(x)$ ... x je kopec, $Z(x)$ ... x je zdolatelný, $H(x)$ ... x je hora, úsudek odpovídá:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(K(x) \Rightarrow Z(x)) \\ \exists x\,(H(x) \wedge \neg Z(x)) \\ \hline \exists x\,(H(x) \wedge \neg K(x)) \end{array}$$

Úsudek je správný, protože množina klausulí $S = \{\forall x\,(\neg K(x) \vee Z(x)), H(a), \neg Z(a), \forall y\,(\neg H(y) \vee K(y))\}$
je nesplnitelná. (Platí $F \in R^2(S)$.)

e) Označme a konstantní symbol s významem ... Alex, a vlastnosti: $M(x)$ ... x je šimpanz, $P(x)$ ... x je problém, $B(x)$ ... x dostane banán a $V(x,y)$ ... šimpanz x vyřeší problém y. Úsudek má tvar:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(M(x) \Rightarrow \forall y\,(P(y) \Rightarrow V(x,y)) \\ \exists x\,P(x) \\ \forall x\,\forall y\,((M(x) \wedge P(y) \wedge V(x,y)) \Rightarrow B(x)) \\ M(a) \\ \hline B(a) \end{array}$$

Úsudek je správný, protože množina klausulí

$$S = \{\forall x\,\forall y\,(\neg M(x) \vee \neg P(y) \vee V(x,y)), P(b), \forall z\,\forall t\,(\neg M(z) \vee \neg P(t) \vee \neg V(z,t) \vee B(z)), M(a), \neg B(a)\}$$

je nesplnitelná. (Platí $F \in R^4(S)$.)