

Kapitola 1

Výroková logika

1.1 Výroky

1.1.1 Příklad Rozhodněte, zda následující posloupnosti symbolů jsou výrokové formule. Jde-li o formuli, pak sestrojte její strom, určete její hloubku a uveďte všechny její podformule (Připomeňte si naši úmluvu o negaci a vynechávání vnějších závorek!):

a) $\neg(\neg x \Rightarrow \neg\neg y)$;

b) x ;

c) $(\neg x \vee y) \Rightarrow z$;

d) $(x \Rightarrow y) \wedge y \Leftrightarrow x$;

e) $((\neg(x \wedge y) \vee z) \Rightarrow u) \Leftrightarrow v$;

f) $(x \Leftarrow y)$.

Výsledek: a) Formule, hloubka 4. b) Formule, hloubka 0. c) Formule, hloubka 3. d) Není formule, chybí pár závorek. e) Formule, hloubka 5. e) Není formule, \Leftarrow není logická spojka.

1.1.2 Příklad Ve kterých ohodnoceních u je formule

a) $(x \Rightarrow \neg x) \wedge (\neg x \Rightarrow x)$ pravdivá;

b) $x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ nepravdivá;

c) $x \wedge (y \Rightarrow (z \vee x))$ pravdivá;

d) $(x \Rightarrow \neg x) \Leftrightarrow \neg x$ nepravdivá;

e) $(x \vee \neg y) \Rightarrow (\neg x \wedge y)$ pravdivá;

e) $((((x \vee y) \wedge z) \wedge y) \vee x)$ nepravdivá?

Výsledek: a) V žádném pravdivostním ohodnocení. b) Pro pravdivostní ohodnocení $u(x) = 1, u(y) = 0$. c) Pro všechna ohodnocení, pro něž je $u(x) = 1$. d) V žádném pravdivostním ohodnocení. e) Pro pravdivostní ohodnocení $u(x) = 0$ a $u(y) = 1$. f) Pro všechna ohodnocení, pro něž logická proměnná x je nepravdivá a aspoň jedna z logických proměnných y, z je také nepravdivá. Tj. $u(x) = 0$ a současně $u(y) = 0$ nebo $u(z) = 0$.

1.1.3 Příklad Zjistěte, zda jsou dané formule tautologie, kontradikce nebo splnitelné formule:

- a) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \vee y)$;
- b) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg x \wedge y)) \vee \neg y$;
- c) $((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)) \Leftrightarrow ((\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y))$;
- d) $(x \Rightarrow (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$;
- e) $((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \wedge y) \Rightarrow z)$;
- f) $((x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$.

Výsledek: a) Splnitelná formule, která není tautologie. b) Splnitelná formule, která není tautologie. c) Kontradikce. d) Splnitelná formule, která není tautologie. e) Tautologie. f) Splnitelná formule, která není tautologie.

1.1.4 Příklad Ukažte, že následující formule jsou tautologie (jde o důležité tautologie):

- a) $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$ (dvojitá negace);
- b) $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (de Morganovo pravidlo);
- c) $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (de Morganovo pravidlo);
- d) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$;
- e) $(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$;
- f) $(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$, totéž platí pro disjunkci (komutativita);
- g) $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$, totéž platí pro disjunkci (asociativita);
- h) $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$ (distributivita);
- i) $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ (distributivita);
- j) $(\alpha \Rightarrow \neg\alpha) \Leftrightarrow \neg\alpha$;
- k) $\alpha \vee \neg\alpha$ (vyloučení třetího);
- l) $(\alpha \wedge \neg\alpha) \Rightarrow \beta$;
- m) $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma)$;
- n) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$;
- o) $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$ (tranzitivita \Rightarrow);
- p) $(\alpha \Rightarrow (\beta \wedge \neg\beta)) \Leftrightarrow \neg\alpha$;
- q) $((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha) \Leftrightarrow \alpha$ (Peirceuv zákon).

1.1.5 Příklad V tomto příkladu je α některá tautologie, β některá kontradikce a φ je výroková formule. Ukažte, že

- a) $(\beta \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$ je tautologie,
- b) $(\alpha \vee \varphi)$ je tautologie,
- c) $(\beta \wedge \varphi)$ je kontradikce.

1.1.6 Příklad Jestliže formule $\varphi \Rightarrow \psi$ je tautologie, pak i formule $(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$ a $(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \psi$ jsou tautologie. Ukažte.

1.2 Sémantický důsledek

1.2.1 Příklad Ukažte, že platí následující konsekventy:

- a) $\{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma\} \models \alpha \Rightarrow \gamma$;
- b) $\{\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta\} \models \neg\alpha$;
- c) $\{\alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma\} \models \gamma$;
- d) $\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \neg\beta\} \models \neg\alpha$;
- e) $\{(a \wedge b) \Rightarrow c, (a \wedge \neg b) \Rightarrow c\} \models a \Rightarrow c$

1.2.2 Příklad Přeformulujte následující věty do formulí výrokového počtu a zjistěte, zda formule pod čarou je konsekventem množiny formulí nad čarou.

- a) Jestliže prší a já si vezmu deštník, nezmoknu.
Vezmu si deštník.

Nezmoknu.
- b) Nebude pršet.
Spadnu do potoka.
Když spadnu do potoka, budu mokrý.

Jestliže nebude pršet, budu mokrý.
- c) Jestliže sním neznámé houby a není mi dobře, vyhledám lékaře.

Jestliže sním neznámé houby a je mi dobře, nevyhledám lékaře.
- d) Není pravda, že Petr hraje fotbal i hokej.
Petr nehraje fotbal.

Petr hraje hokej.
- e) Je doma nebo ve škole.
Jestliže je doma, hraje počítačové hry.

Jestliže nehraje počítačové hry, pak je ve škole.
- f) Jestliže jsem vzhuru, pracuji, ale jestliže spím, jsem v posteli.
Buď jsem vzhuru nebo spím.
Jestliže pracuji, pak nejsem v posteli, a jestliže spím, pak nepracuji.

Jsem v posteli.

Výsledky: a) Označme: p = prší, b = beru si deštník, n = nezmoknu. Pak výroky nad čarou odpovídají množině $\{(p \wedge b) \Rightarrow n, b\}$, výrok pod čarou odpovídá formuli n a tento konsekvent neplatí.

b) Označme: n = nebude pršet, s = spadnu do potoka, b = budu mokrý. Pak výroky nad čarou odpovídají množině $\{n, s, s \Rightarrow b\}$, výrok pod čarou odpovídá formuli $n \Rightarrow b$ a tento konsekvent platí.

c) Označme: s = sním neznámé houby, j = je mi dobře, v = vyhledám lékaře. Pak výroky nad čarou odpovídá formuli $(s \wedge \neg j) \Rightarrow v$, výrok pod čarou formuli $(s \wedge j) \Rightarrow \neg v$ a tento konsekvent neplatí.

d) Označme: f = Petr hraje fotbal, h = Petr hraje hokej. Pak výroky nad čarou odpovídají množině $\{\neg(f \wedge h), \neg f\}$, výrok pod čarou odpovídá formuli h a tento konsekvent neplatí.

e) Označme: d = je doma, v = je ve škole, h = hraje počítačové hry. Pak výroky nad čarou odpovídají množině $\{d \vee v, d \Rightarrow h\}$, výrok pod čarou odpovídá formuli $\neg h \Rightarrow v$ a tento konsekvent platí.

f) Označme: v = jsem vzhuru, p = pracuji, s = spím, j = jsem v posteli. Pak výroky nad čarou odpovídají množině $\{(v \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow j), v \oplus s, (p \Rightarrow \neg j) \wedge (s \Rightarrow \neg p)\}$, výrok pod čarou formuli j a tento konsekvent neplatí.

1.2.3 Příklad Rozhodněte, zda množina formulí M je splnitelná nebo nespjitelná:

- $M = \{a \vee \neg b, b \wedge \neg a, b \Rightarrow a\}$,
- $M = \{a \Rightarrow b, a \Rightarrow \neg b, a \wedge b\}$,
- $M = \{(a \vee b) \Rightarrow c, (a \wedge \neg b) \Rightarrow c, a \Rightarrow c\}$,
- $M = \{(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b)\}$.

Výsledky: a) Nespjitelná. b) Nespjitelná. c) Splnitelná. d) Nespjitelná.

1.2.4 Příklad Je dána množina výrokových formulí $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Ukažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- S je splnitelná množina;
- $\neg((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$ není tautologie;
- $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg \gamma$ není tautologie.

1.3 Rezoluční metoda ve výrokové logice

1.3.1 Příklad. Najděte rezolventy klausulí

- $x \vee \neg y \vee z$ a $\neg x \vee z \vee \neg t$;
- $a \vee b$ a $\neg b \vee c$;
- $p \vee q \vee r \vee \neg s$ a $p \vee q \vee s \vee \neg t$.

Výsledek. a) $\neg y \vee z \vee \neg t$; b) $a \vee c$; c) $p \vee q \vee r \vee \neg t$.

1.3.2 Příklad. Utvořte $R^2(S)$ pro $S = \{\neg a \vee b, \neg b \vee c, a \vee d, a \vee \neg c, a \vee \neg d\}$.

Výsledek. $R^2(S) = \{\neg a \vee b, \neg b \vee c, a \vee d, a \vee \neg c, a \vee \neg d, \neg a \vee c, b \vee d, b \vee \neg c, b \vee \neg d, a, a \vee \neg b, c, b, b \vee \neg b, a \vee \neg a, c \vee d, c \vee \neg c, c \vee \neg d, a \vee b\}$.

1.3.3 Příklad. Rezoluční metodou rozhodněte, zda S je splnitelná množina klausulí, kde:

a) $S = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s \vee t, \neg s \vee y, \neg t, \neg p \vee \neg x, \neg q \vee w, \neg q \vee \neg w\}$;

b) $S = \{a, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg d \vee f, \neg d \vee b, \neg c \vee g, \neg f \vee g, \neg g\}$;

c) $S = \{x \vee y, \neg z \vee t, \neg x \vee t, \neg y \vee z, \neg t\}$.

Výsledek. a) Splnitelná. Je pravdivá např. pro ohodnocení $u(p) = 1, u(q) = 0, u(s) = 1, u(t) = 0, u(x) = 0, u(y) = 1, u(r)$ a $u(w)$ libovolné.

b) Splnitelná. Je pravdivá např. pro ohodnocení $u(a) = 1, u(b) = u(c) = u(d) = u(f) = u(g) = 0$.

c) Nesplnitelná.

1.3.4 Příklad. Rezoluční metodou rozhodněte, zda S je splnitelná množina formulí, kde:

a) $S = \{p \Rightarrow (r \vee s), \neg p \Rightarrow q, r \Rightarrow (t \wedge v), (v \wedge t) \Rightarrow s\}$;

b) $S = \{a \Rightarrow (b \wedge f), (a \wedge b) \Rightarrow c, c \Rightarrow (f \wedge (\neg d \vee f)), a\}$;

Výsledek. a) Splnitelná. Je pravdivá např. pro ohodnocení $u(p) = 1, u(r) = 0, u(s) = 1, u(q), u(t)$ a $u(v)$ libovolné.

b) Splnitelná. Je pravdivá např. pro ohodnocení $u(a) = u(b) = u(c) = u(f) = 1, u(d)$ libovolné.

1.3.5 Příklad. Pomocí rezoluční metody rozhodněte, zda množina formulí S je splnitelná a zda $S \models \alpha$, kde:

a) $S = \{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (x \wedge \neg z), t \Rightarrow x\}, \alpha = z$;

b) $S = \{p, (p \wedge r) \Rightarrow s, (p \wedge q) \Rightarrow t, q \Rightarrow r, (s \vee t) \Rightarrow w\}, \alpha = w$.

Výsledek. a) S je splnitelná (např. $u(x) = u(y) = u(z) = 1$); $S \models z$.

b) S je splnitelná (např. $u(p) = 1, u(q) = u(r) = u(s) = u(t) = u(w) = 0$); $S \not\models w$.