2 Asympt. chování funkcí, řešení rekurentních vztahů

2.1 Řešení příkladů z domácí přípravy.

1. Z definice ukažte, že platí: Pro $f(n) = 5^n + 100n^4$ máme $f(n) \in \Theta(5^n)$.
2. Jsou dány tři nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$. Dokažte:

   Jestliže $f(n)$ je $\mathcal{O}(g(n))$ a $g(n)$ je $\mathcal{O}(h(n))$, tak $f(n)$ je $\mathcal{O}(h(n))$.
3. Dokažte následující tvrzení: *Jsou dány nezáporné funkce $f_1(n)$, $f_2(n)$ a $h(n)$ takové, že*

   $$f_1(n) \in \Theta(h(n)),\ f_2(n) \in \Theta(h(n)\ \log_2 n),$$

   pak $(f_1 + f_2)(n) \in \Theta(h(n)\ \log_2 n)$.

2.2 Příklad z minulého cvičení, který se nestihl.

Je dána funkce $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Najděte co nejjednodušší funkci $g(n)$, pro kterou platí $f(n) \in \Theta(g(n))$.

2.3 Dokažte nebo vyvraťte: Jestliže pro nezáporné funkce $f(n)$ a $g(n)$ platí $f(n) \in \Theta(g(n))$ a $g(n) \in \Omega(1)$, pak pro každou konstantu $k > 0$ platí $f(n) + k \in \Theta(g(n))$.

2.4 Dokažte nebo vyvraťte: Jestliže pro funkce $f(n)$ a $g(n)$ platí $f(n) \in \Theta(g(n))$ a $g(n) \in \Omega(1)$, pak

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(\sum_{i=1}^{n} g(i)).$$

2.5 Odhadněte asymptotický růst funkcí:

1. $\sum_{i=1}^{n} (8 \frac{i}{2^i})$.
2. $\sum_{i=1}^{n} (i^4\ \log_2^3 i + i^3\ \log_2^9 i)$.

Samostaná práce na příští cvičení

2.6 Dokažte nebo vyvraťte: Jestliže pro nezáporné funkce $f(n)$ a $g(n)$ platí $f(n) \in \Theta(h(n))$ a $g(n) \in \omega(h(n))$, pak

$$f(n) + g(n) \in \Theta(g(n)).$$

2.7 Odhadněte asymptotický růst funkcí:

1. $\sum_{i=0}^{n} (4i^3 + i^2 + 26)$.
2. $\sum_{i=1}^{n} (5^i + i^{100})$.

Další příklad

2.8 Dokažte nebo vyvraťte: Jestliže pro funkci $f(n)$ platí $f(n) \geq n$ a $k \geq 2$, pak

$$f(n) \cdot k^{f(n)} \in 2^{\mathcal{O}(f(n))}.$$

Třída $2^{\mathcal{O}(f(n))}$ se skládá ze všech funkcí $g(n)$, pro které existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $g(n) \leq 2^{c\,f(n)}$. (Mohli jsme to také formulovat takto: $g(n) = 2^{h(n)}$, kde $h(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.)