1.3 Řešení rekursivních vztahů

V této části se zabýváme asymptotickým odhadem funkcí, kde funkční hodnota $T(n)$ závisí na několika hodnotách menších argumentů a další funkci.

Příkladem takového vztahu/funkce je např. počet kroků třídícího algoritmu, kde setřídění seznamu n čísel převedeme na roztřídění každé poloviny seznamu nezávisle a pak „spojení“ takto roztříděných seznamů. Tedy počet kroků se dá vyjádřit následující rovností

$$T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n.$$

1.3.1 Přímá metoda. Metoda spočívá v tom, že odhadneme asymptotický růst a odhad matematickou indukcí dokážeme. Ukažme si to na příkladě:

Příklad. Najděte asymptotické chování funkce $T(n)$, kde

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, \quad T(1) = 1.$$

Řešení. Náš odhad je: $T(n) \leq c\dot{n}\,\lg n$.

Základní krok: Pro $n = 2$ platí $T(2) = 2T(1) + 2 = 4$. Tedy $T(2) \leq c \cdot 2$ pro každou konstantu $c \geq 2$.

Indukční krok. Předpokládejme, že vztah platí pro všechna $m < n$. Then

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 2\,c \cdot \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} + n = c\dot{n}(\lg n - 1) + n.$$

Navíc

$$cn \lg n - cn + n = cn \lg n + n(1 - c) \leq c\dot{n} \lg n,$$

protože $c \geq 2$. Tedy $T(n) \in \mathcal{O}(n) \lg n$.

Obdobně se dá ukázat $T(n) \in \Omega(n\ \lg n)$.

1.3.2 Řešení rekursivních vztahů pomocí stromů rekurse. Získat dobrý odhad pro přímou metodu není snadná záležitost. Nyní si ukážeme použití rekursivních stromů, které nám pomůže když ne vždy rekursivní vztah vyřešit, tak „kvalifikovaný“ odhad najít. Tuto metodu si ukážeme na dvou příkladech; v prvním případě vztah přímo vyřešíme, ve druhém získáme odhad, který pak přímou metodou — t.j. indukcí dokážeme.

1.3.3 Příklad 1. Řešme rekursivní vztah

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2.$$

Řešení: Vytvoříme si jednotlivé hladiny stromu, který popisuje rekursivní výpočet funkce $T(n)$. V nulté hladině máme pouze $T(n)$ a hodnotu n^2, kterou potřebujeme k výpočtu $T(n)$ (známe-li $T\left(\frac{n}{4}\right)$).

V první hladině se nám výpočet $T(n)$ rozpadl na tři výpočty $T(\frac{n}{4})$. K tomu potřebujeme hodnotu $3 \cdot (\frac{n}{4})^2 = \frac{3}{16}\, n^2$.

Při přechodu z hladiny i do hladiny $i+1$ se každý vrchol rozdělí na tři a každý přispěje do celkové hodnoty jednou šestnáctinou předchozího. Je proto součet v hladině i roven $(\frac{3}{16})^i\, n^2$.

Poslední hladina má vrcholy označené hodnotami $T(1)$ a tím rekurse končí. Počet hladin odpovídá $\lceil \log_4 n \rceil$. V poslední hladině je $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ hodnot $T(1)$. Proto platí

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\lceil \log_4 n \rceil} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 + h(n),$$

kde $h(n) = T(1) \cdot n^{\log_4 3} \in \Theta(n^{\log_4 3})$. Odtud

$$T(n) < n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i + h(n) = n^2 \frac{1}{1-\frac{3}{16}} + h(n) = \frac{16}{13} n^2 + h(n).$$

Navíc, $h(n) \in o(n^2)$, protože $\log_4 3 < 1$. Ukázali jsme, že $T(n) \in \Theta(n^2)$. □

1.3.4 Příklad 2. Řešme rekurentní vztah

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n.$$

Řešení: Vytvoříme si jednotlivé hladiny stromu, který popisuje rekursivní výpočet funkce $T(n)$. V nulté hladině máme pouze $T(n)$ a hodnotu n, kterou potřebujeme k výpočtu $T(n)$ (známe-li $T(\frac{n}{3})$ a $T(\frac{2n}{3})$).

V první hladině se nám výpočet $T(n)$ rozpadl na výpočet $T(\frac{n}{3})$ a $T(\frac{2n}{3})$. K tomu potřebujeme hodnotu $\frac{n}{3} + \frac{2n}{3} = n$.

Ve druhé hladině se vrchol $T(\frac{n}{3})$ rozpadne na $T(\frac{n}{9})$ a $T(\frac{2n}{9})$; vrchol $T(\frac{2n}{3})$ se rozpadne na $T(\frac{2n}{9})$ a $T(\frac{4n}{9})$. Součet v druhé hladině je

$$\frac{n}{9} + \frac{2n}{9} + \frac{2n}{9} + \frac{4n}{9} = n.$$

Nejpozději ve stromě skončí větev odpovídající členům $\frac{2^i n}{3^i}$; skončí právě tehdy, když $\frac{2^i n}{3^i} = 1$. (První člen ve stromu skončí pro $\frac{n}{3^i} = 1$.) Proto ve vyšších hladinách už je součet menší. Poslední neprázdná hladina odpovídá takovému i, že

$$n \to \frac{2n}{3} \to \frac{2^2 n}{3^2} \to \ldots \to \frac{2^i n}{3^i} = 1,$$

t.j. $(\frac{2}{3})^i n = 1$, nebo-li $n = (\frac{3}{2})^i$ a $i = \log_{\frac{3}{2}} n$.

Je ovšem zřejmé, že nevyužijeme celou poslední hladinu — v poslední hladině bude pouze jediný list. Proto, přestože $\log_{\frac{3}{2}} n$ je větší než 1 (a také na základě analogie s $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$) zkusíme odhad

$$T(n) \leq d \cdot n \lg n.$$

Odhad je správný a proto platí $T(n) \in \mathcal{O}(n \lg n)$. □

1.3.5 Řešení pomocí Master Theorem

Věta — „Master Theorem“. Jsou dána přirozená čísla $a \geq 1$, $b > 1$ a nezáporná funkce $f(n)$. Předpokládejme, že funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ znamená buď $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{b} \rceil$.

1. Jestliže $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a-\varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$, pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Jestliže $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}\, \lg n)$.
3. Jestliže $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$ a jestliže $a\,f(\frac{n}{b}) \leq c\,f(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ pro všechna dostatečně velká n, pak $T(n) \in \Theta(f(n))$.

□

1.3.6 Poznámka. Věta 1.3.5 nepokrývá všechny možné případy. Případy, které nejsou pokryty:

1. Funkce $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a})$, ale $f(n) \notin \mathcal{O}(n^{\log_b a-\varepsilon})$ pro žádné $\varepsilon > 0$. Jinými slovy, $f(n)$ není polynomiálně menší než $\mathcal{O}(n^{\log_b a})$.
2. Funkce $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a})$, ale $f(n) \notin \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ pro žádné $\varepsilon > 0$ (jinými slovy, $f(n)$ není polynomiálně větší než $\Omega(n^{\log_b a})$) nebo neplatí $a\,f(\frac{n}{b}) \leq c\,f(n)$.

1.3.7 Myšlenka zdůvodnění Master Theorem. Master Theorem zdůvodníme pouze pro n, která jsou mocninami b; jinými slovy, pouze v případě, kdy nemusíme pracovat s horní a dolní celou částí. Zdůvodnění je založeno na následujících tvrzení.

Lemma 1. Jsou dána přirozená čísla $a \geq 1$, $b > 1$ a nezáporná funkce $f(n)$. Předpokládejme, že funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n).$$

Pak platí

$$T(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j}) + h(n),$$

kde $h(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$. □

Lemma 2. Pro $g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$ z lemmatu 1 platí:

1. Je-li $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a-\varepsilon})$ pro $\varepsilon > 0$, pak $g(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a})$.
2. Je-li $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $g(n) \in \Theta(n^{\log_b a}\, \lg n)$.
3. Jestliže existuje $c < 1$ takové, že $a\,f(\frac{n}{b}) \leq c\,f(n)$, pak $g(n) \in \Theta(f(n))$.

□

1.3.8 Jak jsme uvedli výše, nepokrývá Master Theorem všechny případy. Ukážeme ještě jedno tvrzení, které je zobecněním Master Theorem a dovoluje najít asymptotické odhady pro širší třídu funkcí.

Tvrzení. Jsou dána čísla $a \geq 1$, $b > 0$ a nezáporná funkce $f(n)$. Jestliže $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ pro $k \geq 0$, pak pro funkci $T(n)$ danou rovnicí

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

platí: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$. □

Důkaz je analogický důkazu Master Theorem, bod 2. Stačí použít zobecnění bodu 2 z Lemmatu 2, viz 1.3.7.