

**3.1.14 Techniky pro návrh Turingova stroje — informace pamatovaná stavem.** Jestliže chceme pomocí TM zkontrolovat, zda se nějaký další symbol vstupního slova rovná/nerovná prvnímu symbolu, můžeme postupovat takto: stav, do kterého se dostaneme po přečtení 0, označíme  $(q, 0)$ ; stav, do kterého se dostaneme po přečtení 1, označíme  $(q, 1)$ . Tím poznáme, jaký byl čtený symbol, jen z pojmenování stavu.

Je samozřejmé, že není nutné takové pojmenování zavádět. Jestliže se jedná o TM s pouze několika stavy, můžeme stav  $(q, 0)$  označit  $q_1$ ,  $(q, 1)$  označit  $q_2$  a informaci o symbolu, který byl přečten, zohledňuje přechodová funkce. Ovšem v případě, že pracujeme s TM o několika desítkách či stovkách stavů, je takového pojmenování „mnemotechnickou pomůckou“.

**3.1.15 Techniky pro návrh Turingova stroje — více stop.** Pro zjednodušení práce na návrhu Turingových strojů si můžeme představit, že páska má víc stop. Formálně to znamená, že jednotlivý páskový symbol je vlastně dvojice (v případě dvou stop) nebo obecně  $m$ -tice (v případě  $m$  stop). Tvar takového páskového symbolu může nést další informace. Např. chceme-li jednoduše popsat páskový symbol, který znamená „zkontrolovaný“ vstupní symbol  $a$ , můžeme takový páskový symbol „pojmenovat“  $(\star, a)$ , kde ta  $\star$  nám kóduje fakt, že symbol  $a$  byl zkontrolován. Protože každý vstupní symbol  $a$  má být také páskovým symbolem, ztotožňujeme, v případě dvou stop, symbol  $a$  s dvojicí  $(B, a)$  a vlastní blank  $B$  s dvojicí  $(B, B)$ .

Opět platí, že jsme to dělat nemuseli, mohli jsem pro „zkontrolovaný“ vstupní symbol  $a$  použít nějaký jiný znak, např.  $A$ , ale ve složitějších konstrukcích je využití více stop výhodné — použijeme více stop např. při konstrukci Turingova stroje s jednou páskou, který simuluje vícepáskový Turingův stroj zavedený v následujícím odstavci.

**3.1.16 Turingův stroj s  $k$  páskami.** Turingův stroj s  $k$  páskami se skládá z řídicí jednotky, která se nachází v jednom z konečně mnoha stavů  $q \in Q$ , množiny vstupních symbolů  $\Sigma$ , množiny páskových symbolů  $\Gamma$ , přechodové funkce  $\delta$ , počátečního stavu  $q_0$ , páskového symbolu  $B$  a množiny koncových stavů  $F$ . Dále je dáno  $k$  pásek a  $k$  hlav;  $i$ -tá hlava vždy čte jedno pole  $i$ -té pásky. Přechodová funkce  $\delta$  je parciální zobrazení, které reaguje na stav, ve kterém se Turingův stroj nachází a na  $k$ -tici páskových symbolů, kterou jednotlivé hlavy snímají. (Formálně je  $\delta$  parciální zobrazení,  $\delta: (Q \setminus F) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$ ).

Na začátku:

- Vstupní slovo je na první pásce; kromě vstupního slova obsahují všechna pole pásky blank  $B$ .
- Všechny ostatní pásky mají ve všech polích blank  $B$ .
- Řídicí jednotka je v počátečním stavu  $q_0$ .
- První hlava čte první symbol vstupního slova.

**3.1.17 Krok** Turingova stroje s  $k$  páskami je určen přechodovou funkcí. Jestliže přechodová funkce je definována, pak (na základě přechodové funkce):

- Řídicí jednotka se přesune do nového stavu.

- Každá hlava přepíše obsah pole, které čte (může i stejným symbolem).
- Každá hlava se posune doprava nebo doleva (přechodová funkce udává pohyb každé hlavy nezávisle na pohybech ostatních hlav).
- Jestliže se Turingův stroj nachází v koncovém stavu, přechodová funkce není definována a Turingův stroj se zastaví.

**3.1.18 Jazyk přijímaný Turingovým strojem s  $k$  páskami.** Obdobně jako pro Turingův stroj s jednou páskou definujeme:

Turingův stroj se *úspěšně zastaví*, jestliže řídicí jednotka vstoupila do koncového stavu. Jestliže Turingův stroj nemá definován následující krok a není v koncovém stavu, říkáme, že se Turingův stroj zastavil *neúspěšně*.

Slovo  $w \in \Sigma^*$  je *přijímáno* Turingovým strojem, jestliže se na něm Turingův stroj úspěšně zastaví. Všechna slova přijímaná Turingovým strojem tvoří *jazyk přijímaný* tímto strojem.

Jestliže se navíc Turingův stroj na všech slovech zastaví, říkáme že Turingův stroj *rozhoduje* jazyk.

**3.1.19 Poznámky.** Na každý Turingův stroj s jednou páskou se můžeme dívat jako na Turingův stroj s  $k$  páskami, kde  $k = 1$ . Proto Turingův stroj s jednou páskou je zvláštní případ Turingova stroje s  $k$  páskami.

Stejně jako u Turingova stroje s jednou páskou i pro více pásek existuje několik variant — pásky mohou mít pevné levé konce, Turingův stroj v jednom kroku nemusí pohnout některou z hlav. Opět platí, že všechny tyto varianty „mají stejnou sílu“, tj. jestliže nějaký jazyk  $L$  je přijímán/rozhodován TM jednoho typu, je přijímán/rozhodován i TM druhého typu.

**3.1.20 Věta.** Ke každému Turingovu stroji  $M_1$  s  $k$  páskami existuje Turingův stroj  $M_2$  s jednou páskou, který má stejné chování jako  $M_1$ .

Navíc, jestliže  $M_1$  potřeboval k úspěšnému zastavení  $n$  kroků, pak  $M_2$  potřebuje  $\mathcal{O}(n^2)$  kroků.

**Myšlenka důkazu.** Turingův stroj  $M_2$  má jedinou pásku rozdělenou do  $2k$  stop. Každá páska  $M_1$  je simulována dvěma stopami  $M_2$  – a to tak, že první stopa vždy obsahuje informaci o poloze odpovídající hlavy TM  $M_1$ , ve druhé stopě je obsah simulované pásky.

Simulace jednoho kroku TM  $M_1$ :

Hlava TM  $M_2$  se nachází na pásce tak, že všechna pole s informací o poloze hlavy jsou nalevo. Hlava nejprve přejede pásku tak, aby stroj navštívil pozice všech hlav (a zapamatoval si obsahy odpovídajících polí). Tím získá všechny informace, které určují krok TM  $M_1$ .

Na základě přechodové funkce TM  $M_1$  při postupu doleva změní nejen obsahy sudých stop, ale i posune označení polohy hlav buď o jedno pole doleva nebo doprava podle hodnoty přechodové funkce TM  $M_1$ .

Jestliže TM  $M_1$  udělal od začátku práce  $n$  kroků, potřebuje TM  $M_2$  na jeden krok maximálně  $\mathcal{O}(n)$  kroků.

**3.1.21 Nedeterministický Turingův stroj.** Jestliže pro Turingův stroj (ať již s jednou páskou nebo s více páskami) připustíme, aby v jedné situaci mohl provést několik různých kroků, dostáváme nedeterministický Turingův stroj. Formálně zadefinujeme nedeterministický Turingův stroj (NTM) pouze pro variantu s jednou páskou, která je nekonečná na obě strany.

*Nedeterministický Turingův stroj* je sedmice  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ , kde

- $Q$  je konečná množina stavů,
- $\Sigma$  je konečná množina vstupních symbolů,
- $\Gamma$  je konečná množina páskových symbolů, přitom  $\Sigma \subset \Gamma$ ,
- $B$  je prázdný symbol (též nazývaný *blank*), jedná se o páskový symbol, který není vstupním symbolem, (tj.  $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ ),
- $\delta$  je přechodová funkce, tj. parciální zobrazení z množiny  $(Q \setminus F) \times \Gamma$  do množiny  $\mathcal{P}_f(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$  ( $\mathcal{P}_f(X)$  je množina konečných podmnožin  $X$ ),
- $q_0 \in Q$  je počáteční stav a
- $F \subseteq Q$  je množina koncových stavů.

*Krok nedeterministického Turingova kroku* je definován analogicky jako pro (deterministický) Turingův stroj:

Pro  $(p, Y, R) \in \delta(q, X_i)$

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_k \vdash X_1 X_2 \dots X_{i-1} Y p X_{i+1} \dots X_k. \quad (3.3)$$

Pro  $(p, Y, L) \in \delta(q, X_i)$

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_k \vdash X_1 \dots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \dots X_k. \quad (3.4)$$

**3.1.22 Jazyk přijímaný nedeterministickým Turingovým strojem** se skládá ze všech slov  $w \in \Sigma^*$ , pro něž

$$q_0 w \vdash^* Y_1 Y_2 \dots Y_i q_f Y_{i+1} \dots Z_m,$$

pro některý koncový stav  $q_f$ .

Nefornálně: slovo  $w$  je přijato nedeterministickým Turingovým strojem právě tehdy, když existuje „přijímací výpočet“, tj posloupnost kroků, po nichž se stroj dostane do koncového stavu.

Jestliže nedeterministický Turingův stroj  $M$  přijímá jazyk  $L$  a navíc každý jeho výpočet vždy končí po konečně mnoha krocích, říkáme, že  $M$  *rozhoduje* jazyk  $L$ .

**3.1.23 Věta.** Je-li jazyk  $L$  přijímán, resp. rozhodován nedeterministickým Turingovým strojem  $M$ , pak existuje deterministický Turingův stroj  $M_1$  s jednou páskou, který  $L$  přijímá, resp. rozhoduje.